



Berbig.

EUKLIDS
ELEMENTE

DAS ERSTE BIS ZUM SECHSTEN,

SAMMT DEM

EILFTEN UND ZWOELFTEN BUCHE.

AUFS

JOHANN KARL FRIEDRICH HAUFF.

Zweyte verbesserte und mit einer neuen Parallelen-
theorie vermehrte Auflage.

MARBURG
IN DER NEUEN ACADEMISCHEN BUCHHANDLUNG,
1807.

La doctrine des ces livres est à l'égard du reste de la Géometrie, ce que la connoissance des lettres est à la lecture et à l'é[illegible]

UCLA.

Vorrede

zur ersten Ausgabe.

Was ich hier von diesem Buche zu sagen habe, glaube ich nicht vollständiger und in keiner bessern Ordnung vortragen zu können, als, wenn ich an jede Klasse der Leser, die ich für das Buch erwarten kann, mich besonders wende, und ihr das für sie dienliche davon sage. Ich werde dabey diese Klassen nach der zu vermuthenden Anzahl ihrer Mitglieder ordnen.

I. *An studirende Jünglinge.*

Jünglinge meines teutschen Vaterlandes, denen ihre Geistesbildung eine wahre Angelegenheit ist, an Euch ist diese Anrede gerichtet! — Mit dem grossen Haufen derer, die auf Universitäten täglich sechs bis acht Stunden Vorlesungen ohne Plan und Ordnung durch einander hören, um so in zwey bis drey Jahren einen Pack von Heften zusammen zu schreiben, der sie in den Stand seze, bey der bevorstehenden Prüfung einige elementarische Fragen aus dieser oder jener Brodwissenschaft nothdürftig zu beantworten, habe ich hier nichts zu thun.

 Sie

Sie entehren die Wiffenfchaften durch die Art, wie fie fie treiben, haben vom Werthe der Wahrheit keine Vorftellung, und für das, was ich hier fagen werde, keinen Sinn. —

Euch übergebe ich hier, in eurer Mutterfprache, *das Buch der Bücher*, das Buch das die Elemente, d. h. die *erfte Grundlage alles menfchlichen Wiffens* enthält, alfo die *wahre Wiffenfchaftslehre.* Dafs es dies fey, fagt Euch fchon der Titel des *Buchs: Elemente* (ϛοιχεια) und des Urhebers: *Verfaffer der Elemente* (ϛοιχειωτης), den beyde fchlechthin und ohne Beyfaz im ganzen Alterthume führen; dies fagt Euch ferner die Gefchichte des Buchs, die Euch lehrt, dafs es feit mehr, als *zweytaufend* Jahren das *Lehrbuch für die Welt* gewefen, d. h. in die Sprachen aller cultivirten Nationen überfezt, von den gröfsten Köpfen aller mit der ausgezeichnetften Achtung beehrt, allen, denen es um gründliche Wiffenfchaft zu thun war, mit dem angelegentlichften Eifer empfohlen, und von ihnen mit dem glücklichften Erfolge gebraucht worden fey; dies fagt Euch endlich am überzeugendften die genauere Bekanntfchaft und Befchäftigung mit dem Buche felbft, die das Urtheil bald rechtfertigen wird, dafs wir in Rückficht auf *Syftem* und *Methode* überall nichts gleich Vollkommenes aufzuweifen haben. Denn dafs es nur in diefem Sinne, alfo nicht in *materialer*, fondern blofs in *formaler* Bedeutung des Worts genommen fey, wenn ich behaupte, die Elemente enthalten *die erfte Grundlage al-*

les menschlichen Wissens, lehrt schon eine flüchtige Ansicht des Buchs, welche zeigt, dass es in Ansehung der Materie sich blos auf die Geometrie einschränke.

Aber auch selbst in dieser Bedeutung möchte doch meine Behauptung noch Einem oder dem Andern übertrieben scheinen. Es wird mir also obliegen sie zu rechtfertigen.

Wir *wissen* eigentlich nur das, wovon wir wissenschaftliche Erkenntniss haben. *Wissenschaftliche Erkenntniss*, oder *Wissenschaft* aber ist eine systematische, d. h. nach Principien geordnete Verbindung von Kenntnissen zu einem Ganzen. Der Inbegriff der Regeln, die man bey der Anlage und Aufführung eines wissenschaftlichen Lehrgebäudes, d. h. bey der Anordnung eines Zusammenhangs von Gründen und Folgen der Erkenntniss zu beobachten hat, macht dasjenige aus, was man *systematische* oder *wissenschaftliche Methode* nennt. Nun sehen es zwar die Lehrer der Logik für ein Stück ihres Berufs an, ihren Schülern jene Regeln beyzubringen, und sie zu dieser Methode anzuführen; aber wenn sie nicht selbst beym Euklides in die Schule gegangen sind, so sind sie darin *blinde Leiter*. Denn nur von ihm, oder von Niemand, lernt man das Wesen der wissenschaftlichen Methode kennen, nur Er, oder Niemand, hat alle Forderungen derselben in ihrem ganzen Umfange, und nach aller Strenge erfüllt. Wiefern also Euklids Elemente das vollkommenste

Mu-

Muſter der wiſſenſchaftlichen Methode enthalten, und wiefern man ohne ſie dieſe gar nicht kennen lernen, ohne dieſe aber überall keine Wiſſenſchaft zu Stande bringen kann, ſofern iſt man berechtiget, zu behaupten, dieſe Elemente enthalten *die erſte formale Grundlage alles menſchlichen Wiſſens.* Man kann zwar ſehr gut und kurz ſagen, das Weſen der wiſſenſchaftlichen Methode beſtehe darin, *alles, was man vorträgt, aus unbestreitbaren Gründen durch Beyfall erzwingende Schlüſſe darzuthun;* wollte man aber weiter gehen und behaupten, ſo etwas müſste ſich auch wohl ohne Euklids Hülfe bewerkſtelligen laſſen, ſo würde man darin gar ſehr irren. Verſtehen kann man wohl, was jene Worte ſagen wollen, aber damit noch nicht ſogleich leiſten, was ſie fordern. Der Weg vom *Verſtehen Können*, bis zum *Ausführen Können* iſt um ein Beträchtliches weiter, als die meiſten Menſchen glauben. „*Wie man es anzugreiffen habe, um etwas zu Stande zu bringen, lernt man nur von dem, der ſelbſt es zu Stande gebracht hat.*“ (Quid ſit faciendum, a faciente diſcendum) hat ſchon Seneca behauptet, und die Erfahrung aller Zeiten hat die Wahrheit dieſer Behauptung beſtättiget. Um auch durch Eure eigene Erfahrung Euch davon zu überzeugen, ſo gehet einmal hin, und vergleichet ein Stück der Dogmatik, des Natur-, Staats- oder Kirchenrechts, der Semiotik oder Pathologie, der Metaphyſik oder Moral mit irgend einem Stücke der Elemente, vergleichet insbeſondere das, was die Lehrer der nur genannten Wiſſenſchaf-

ten Euch für Beweise ausgeben, mit einem Beweise des Euklides! Und doch wollen alle diese Leute auch Lehrer von *Wissenschaften* seyn, wollen alle auch auf eine *wissenschaftliche Methode* Ansprüche machen! *)

Lasset Euch nicht irre machen durch das Vorgeben: „Euklides habe uns zwar ein *vollkommenes* Muster der *mathematischen* Methode aufgestellt, diese aber lasse sich in andern Wissenschaften nicht nachahmen." Dies ist lächerlich. Was die mathematische Methode eigenthümliches hat, besteht lediglich in den Constructionen ihrer Gegenstände, worin es freylich der Mathematik keine andere Wissenschaft nachthun kann, was aber auch noch keinem Vernünftigen eingefallen ist, von einer andern zu fordern, und deren auch in der oben beygebrachten Bestimmung des Wesens der wissenschaftlichen Methode mit keinem Worte erwähnt ist. Unter dieser Bestimmung also *kann* und

*) Um solcher willen, die mich nicht kennen, bemerke ich bey dieser Stelle, dass ich weit entfernt sey, der Mathematik auf Kosten der übrigen Wissenschaften eine Lobrede halten, oder den Werth der leztern, an und für sich betrachtet, in Vergleichung mit dem der erstern herabsezen zu wollen. Ich schäze jede nach ihrem wahren Werthe für die Menschheit richtig und unbefangen, und meine Absicht ist hier nur darauf gerichtet, zu zeigen, wie weit die übrigen an *wissenschaftlicher Vollkommenheit* noch hinter der Mathematik zurück stehen.

und *soll* die mathematische Methode allen andern Wissenschaften zum Muster dienen, oder unter dieser Bestimmung ist sie mit der allgemeinen wissenschaftlichen Methode ganz einerley.

Ihr Jünglinge also, die ihr den Vorsaz gefaſst habt, irgend eine Wissenschaft Euch so zu eigen zu machen, daſs sie in der That ein durch eigene Kraftanwendung erworbenes Eigenthum, nicht blos ein aus dem Hefte Eures Lehrers — dessen Geist mit dem Daseyn von diesem oft ebensowenig in einer Causalverbindung steht, als der des Unwissendsten unter seinen Schülern — erborgter Besiz für Euch sey, kommet zu allererst her zum Euklides, und lernet von Ihm, was Wissenschaft, lernet von Ihm, was wissenschaftliche Methode, lernet von Ihm, was ein wissenschaftlicher Beweis, lernet von Ihm, was eine erwiesene Wahrheit sey! Und wenn Ihr, nach fortgesezter ernstlicher Beschäftigung mit seinen Elementen, bey einiger Aufmerksamkeit auf Euch selbst, gewahr werdet, wie Ihr da die Wahrheit überall gleichsam mit Händen greiffen, die gegriffene festhalten, und die festgehaltene nöthigen könnt, Euch zu der versteckten zu führen, so wisset, daſs es der Geist des Vaters der Geometrie ist, dessen Wehen Euch dann umgiebt, wisset, daſs dies der Geist der Wahrheit ist, der Euch in alle Wahrheit, so weit sie für den menschlichen Verstand zugänglich ist, leiten, und Eurem Geiste Kraft geben wird, zu besiegen die Hindernisse, die Euch bey der Erforschung derselben aufstossen

mö-

mögen, der endlich Euren ausdaurenden Fleiſs durch Erhöhung Eurer Denkkraft, durch Schärfung Eures Unterſcheidungsvermögens, durch Verfeinerung Eures Sinns für Wahrheit, und durch Ertheilung einer Fertigkeit in feiner Zergliederung und ſcharfer Beſtimmung der Begriffe, in glücklicher Verbindung mehrerer Begriffe zu neuen Säzen, in richtiger Abſonderung der einfachſten und erſten Säze in Eurer Erkenntniſs von den zuſammengeſezteren, in geſchickter Zuſammenſtellung mehrerer Säze nach der Stufenfolge ihrer Abhängigkeit von einander, in Ableitung wichtiger Folgen aus fruchtbaren Säzen, in Bildung richtiger Schlüſſe und bündiger Beweiſe, in Zuſammenſezung und Ueberſchauung langer Schluſsreihen, in Ausſonderung der weſentlichen und zur Auflöſung zureichenden Beſtimmungsſtücke der Aufgaben aus einer Menge, oft ſehr verwickelter, auſſerweſentlicher Beſtimmungen, in Zuſammenreihung und Verknüpfung einer Kette von Gründen und Folgen in ein Ganzes der Erkenntniſs ſo belohnen wird, daſs ihr den Gewinn, den Ihr davon auf Euer ganzes Leben zu jeder andern Art von wiſſenſchaftlicher Beſchäftigung mitbringen werdet, nie genug werdet ſchäzen können.

Sey Ihr nun begierig zu erfahren, wie Ihr es anzugreiffen habt, um von dem Studium des Euklides die eben erwähnten Vortheile zu ziehen, ſo iſt mein Rath folgender:

I. Lefet das Buch in der Ordnung, vom Anfange bis zum Ende, ohne etwas zu überspringen, durch. Aber lefet nicht fo, wie jener Candidat der Theologie der, weil er einmal vom Euklides und feiner Methode, befonders von feinen Beweifen, viel rühmliches gehört hatte, in der löblichen Abficht, auf feine Dogmatik, wo er hin und wieder Bündigkeit in den Beweifen vermifst haben foll, eine erfpriefsliche Anwendung davon zu machen, den heroifchen Entfchlufs fafste, die Elemente innerhalb einer gewiffen Zeit durchzulefen, und fich zu dem Ende ein tägliches Penfum von drey Blättern anfezte, die er jeden Abend vor Schlafengehen fo weglafs, wie man etwa eine Zeitung liefst, und wenn er damit fertig war, die Ecke des lezten Blatts brach und einfchlug, um zu bemerken, wo er den folgenden Abend fortzufahren hätte; fondern

II. Lefet mit folchem Ernfte und folcher Aufmerkfamkeit, dafs Ihr euch nicht das Geringfte entgehen laffet, in der feften Ueberzeugung, dafs hier nicht das Geringfte anzutreffen fey, wovon nicht irgend etwas des Nachfolgenden fo abhängig wäre, dafs es, ohne jenes vorauszufezen, nicht richtig verftanden, oder bewerkftelliget werden könne.

III. Unterfcheidet dabey forgfältig die verfchiedenen Theile, woraus ein jeder Saz befteht, und die theils durch die verfchiedene Schrift, theils durch die bey allen auf einerley

Art

Art gebrauchten Formeln: *es ſey etc. ſo behaupte ich etc. Demnach iſt etc.* leicht von einander zu unterſcheiden ſind.

IV. Leſet aber nicht blos, ſondern durchdenket auch das Geleſene ſo lange, bis Ihr nicht nur jeden einzelnen Saz richtig gefaſst habt, ſondern auch, was die Hauptſache iſt, den Zuſammenhang deſſelben mit allen ſeinen Gründen, ſo wie er in dem Beweiſe dargelegt wird, deutlich und vollſtändig einſehet.

V. Um Euch davon zu verſichern, ſo verſuchet es, nach verſchloſſenem Buch, den Beweis auf dem Papiere oder der Tafel, nachdem Ihr vorher die Figur darauf gezeichnet habt, zu wiederholen. Könnet Ihr ihn ſo durchführen, ſo ſeyd Ihr nun erſt Eurer Sache gewiſs. Bleibet Ihr aber darin ſtecken, ſo verſuchet erſt, ob Ihr nicht etwa durch eigenes Nachdenken, die Lücke, die Euch aufhält, auszufüllen vermöget. Gelingt Euch dies, ſo iſt es deſto beſſer, wo aber nicht, ſo ziehet Euer Buch wieder zu Rathe, erwäget noch einmal genau, was im Saze ausgeſagt, oder verlangt wird, zerleget alsdann die ganze Schluſskette des Beweiſes in ihre Glieder, die einzelnen Schlüſſe, unterſuchet ſorgfältig, welche Theile derſelben jeder von den früher vorgetragenen Säzen, auf welche Ihr dabey verwieſen werdet, begründe, was für ein Moment alſo jeder derſelben in dem ganzen Beweiſe habe, und worin dieſes Moment liege. Und wenn Ihr damit zu Ende ſeyd, ſo durch-

durchlaufet noch einmal schnell die ganze Gedankenfolge des Beweises; alsdann schliesset Euer Buch und wiederholet Euren Versuch, der Euch nun nicht leicht mehr fehlschlagen wird.

VI. Bey diesen Wiederholungen wird Euch der Gebrauch der Zeichen, deren die neueren Mathematiker zur kurzen Darstellung ihrer Schlüsse sich bedienen, und die ich zu diesem Behufe in eine Tafel gebracht und dieser Vorrede angehängt habe, eine beträchtliche Erleichterung verschaffen. Denn diese gewähren, ausser dem Vortheile der Kürze, auch dadurch eine desto leichtere Uebersicht des Ganzen, dass sie die einzelnen Ruhepläze so viel deutlicher ins Auge fallen lassen. Um ein Beyspiel davon zu geben, seze ich die Darstellung des Beweises vom neunten Saze im zweyten Buche vermittelst dieser Zeichen hieher.

Saz.

$$\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 2 \times \overline{AC}^2 + 2 \times \overline{CD}^2.$$

Beweis.

I. AC = CE (n. d. Constr.), folglich (1, 5. S.)
EAC = AEC.
Aber ACE = R (n. d. Constr.) (folglich 1, 32. S.)
EAC + AEC = R und mithin
sowohl EAC
als AEC } = $\frac{1}{2}$ R. Ebenso auch

so-

sowohl CEB} als CBE} $= \frac{1}{2}$R, folglich

AEC + CEB} AEB} = R

II. ECB = R (n. d. Constr.)
EGF = ECB (1, 29. S.) folglich

EGF = R, und mithin (1, 32. S.)
GEF + EFG = R
Aber GEF (einerley mit CEB) $= \frac{1}{2}$R (No. I.)
folglich auch

EFG $= \frac{1}{2}$R. Demnach
GEF = EFG, und mithin (1, 6. S.)
EG = FG

III. ECB = R (n. d. Constr.), folglich (1, 29. S.)
FDB = R, und mithin (1, 32. S.)
DBF + BFD = R.
Aber DBF (einerley mit CBE) $= \frac{1}{2}$ R (No. I.)
folglich auch

BFD $= \frac{1}{2}$R. Demnach
DBF = BFD, und mithin (1, 6. S.)
DF = DB

IV. AC = CE (n. d. Constr.) folglich auch
$\overline{AC}^2 = \overline{CE}^2$, und mithin
$\overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = 2 \times \overline{AC}^2$.
Aber $\overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AE}^2$ (1, 47. S.) folglich auch

---

$\overline{AE}^2 = 2 \times \overline{AC}^2$.

V.

V. $EG = GF$ (No. II.) folglich auch

$\overline{EG}^2 = \overline{GF}^2$; und mithin

$\overline{EG}^2 + \overline{GF}^2 = 2 \times \overline{GF}^2$

Aber $\overline{EG}^2 + \overline{GF}^2 = \overline{EF}^2$ (1, 47. S.) folglich auch

$\overline{EF}^2 = 2 \times \overline{GF}^2$

Aber $GF = CD$, (1, 34. S.) folglich auch

$\overline{GF}^2 = \overline{CD}^2$, und mithin

$\overline{EF}^2 = 2 \times \overline{CD}^2$.

So weit die Vorbereitungen! Werden nun diese einzeln erwiesenen Hülfssäze geschickt mit einander verbunden, und taugliche Substitutionen am gehörigen Orte angebracht, so kommt man vollends schnell auf den zu beweisenden Saz wie folgt:

$\overline{AE}^2 = 2 \times \overline{AC}^2$ (No. IV.)

$\overline{EF}^2 = 2 \times \overline{CD}^2$ (No. V.) folglich

$\overline{AE}^2 + \overline{EF}^2 = 2 \times \overline{AC}^2 + 2 \times \overline{CD}^2$

Aber $\overline{AE}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{AF}^2$ (1, 47. S.) folglich

$\overline{AF}^2 = 2 \times \overline{AC}^2 + 2 \times \overline{CD}^2$

Aber $\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DF}^2$ (1, 47. S.) folglich

$\overline{AD}^2 + \overline{DF}^2 = 2 \overline{AC}^2 + 2 \times \overline{CD}^2$.

Aber $DF = DB$ (No. III.) folglich

$\overline{DF}^2 = \overline{DB}^2$ und mithin

$\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 2 \times \overline{AC}^2 + 2 \times \overline{CD}^2$, w. z. e. w.

VII.

VII. Aber felbft dann, wenn Ihr die Beweife der Säze vermittelft der eben befchriebenen Abkürzungen ohne Anftofs wiederholen könnet, könnte doch Euer Gedächtnifs, wenn dies fehr treu und glücklich wäre, zu viel Antheil daran haben. Und dies darf nicht feyn. Es darf kein Saz mit feinem Beweife eher ein Depofitum Eures Gedächtniffes werden, als Ihr ihn für ein Product Eures Verftandes erkannt habt. Denn Ihr follt hier nicht ein Syftem Euch hiftorifch bekannt machen, dem vielleicht ein Paar Duzende anderer ganz oder zum Theil entgegengefezt find, wie Ihr etwa in der Gefchichte der Philofophie oder in der Kirchengefchichte thut, fondern Ihr follt Euch das *eine*, *nothwendige* und *unwandelbare* Syftem des menfchlichen Verftandes über diefen Gegenftand fo zu eigen machen, dafs Ihr es, im ganzen Umfange des Worts, als ein durch Eure Kraft erzeugtes Geifteseigenthum betrachten könnet. Dazu aber wird fchlechterdings erfordert, dafs Ihr aus Eurem Buche blofs die Materialien zu dem Syfteme und die Art der Zufammenfezung entlehnet, diefe Zufammenfezung aber alsdann felbft bewerkftelliget. Hieraus folgt alfo, dafs Ihr die Beweife *aus ihren Gründen*, nicht *aus dem Gedächtniffe*, müffet wiederholen können. Dafs Ihr aber dies könnet, davon werdet Ihr nur dann Gewifsheit haben, wenn Euch jene Gründe unabhängig von den Gefezen, denen diefes Seelenvermögen unterworfen ift, zu Gebote ftehen. Zu dem Ende müffet Ihr fie alfo öfter, nach längeren Zwifchenzeiten, in anderer Ordnung

nung und Verbindung wiederholen, und, was noch besser ist, selbst andere Beweise zu finden versuchen.

VIII. Was die Aufgaben insbesondere betrift, so werdet Ihr Euch ausserdem in Auflösung derselben fleissig üben müssen, und Ihr werdet wohl thun, sie auch auf mancherley Art abzuändern. Ebenso wird es auch eine nüzliche Uebung seyn, bey den Wiederholungen der Lehrsäze und ihrer Beweise in den dazu gehörigen Figuren nach und nach alles abzuändern, was an ihnen willkührlich ist.

Auf solche Art, hoffe ich, werdet Ihr ohne fremde Hülfe mit dem grösten Theile der Elemente, in eine sehr vertraute Bekanntschaft kommen können. Ich sage mit dem *grösten Theile*, weil etwa das fünfte Buch, und was von den folgenden auf diesem beruhet, eine Ausnahme davon leiden möchte. Was Euch aber in diesem oder den übrigen Büchern von Dunkelheiten oder Schwierigkeiten zurückbleiben mag, das verspreche ich in einem vollständigen Commentare aufzuhellen und zu heben, den ich, so bald meine Amtsgeschäfte, und meine übrigen, theils angefangenen, theils versprochenen, Nebenarbeiten es erlauben werden, nachzuliefern gedenke. Uebrigens machen die hier übersezten Bücher zusammen ein Ganzes aus, das von den andern völlig unabhängig ist.

II. *An*

II. *An die Schul- und Privatlehrer.*

Diesen kann ich zwar die Elemente, aus den im ersten Abschnitte ausführlich beygebrachten Gründen, als das vorzüglichste Lehrbuch empfehlen; aber ich muſs sie bitten, sich erst selbst recht vertraut mit dem Euklides zu machen, ehe sie andere bey ihm einführen wollen, und ich muſs sie beschwören, andern durchaus nichts vorzutragen, was sie nicht selbst vollkommen verstehen. Denn der Schaden, den sie dadurch stiften können, ist unübersehbar groſs. Wenn sie aber jene Bedingungen erfüllt haben, und beym Vortrage der Geometrie nach den Elementen so zu Werke gehen wollen, daſs sie ihren Schülern jeden Saz erst deutlich vorsagen, alsdann durch die Figur an der Tafel erläutern, dabey die Bedingung von der Aussage genau unterscheiden, hierauf den Beweis so führen, daſs sie ihn zwar in Worten hersagen, aber in den allgemeinen Zeichen anschreiben, endlich den Saz wiederholen, dann aber alles auslöschen, und nun durch einen ihrer Schüler, bald diesen, bald jenen, wiederholen lassen, wo dieser etwa stecken bleiben sollte, nachhelfen, und nicht eher weiter gehen, als bis alles richtig gefaſst und durchgeführt ist, so kann ich ihnen für den Erfolg bürgen. Privatlehrern wird dieses Verfahren durch die geringere Anzahl ihrer Zöglinge um soviel leichter. Freylich wird es dabey, besonders im Anfange, etwas langsam gehen. Aber die Langsamkeit der ersten Fortschritte wird durch die Leichtigkeit und Sicher-

heit des ganzen folgenden Ganges mehr, als bloſs erſezt. „In principiis diu haerendum"! iſt ein Grundgeſez bey allem Studiren, das man nie ungeſtraft übertreten kann. Die *erſten Gründe* ſind überall das ſchwerſte. Dieſe für leicht zu nehmen, und, aus Begierde, ſchneller vorwärts zu kommen, darüber flüchtig hinwegzueilen, iſt eine, zwar gewöhnliche, aber höchſt nachtheilige Täuſchung, die ſich allemal dadurch beſtraft, daſs man ſich bald genöthiget ſieht, wieder auf die erſten Gründe zurückzugehen, um ſich darinn zu orientiren, und dies beym weitern Verfolge faſt eben ſo oft wiederholen muſs, als ſie auf eine neue Art combinirt werden ſollen, um zu einem neuen Reſultate zu führen. Daraus entſpringt dann bey den meiſten eine oder die andere der beyden verderblichen Folgen, entweder, daſs ihnen durch das öftere Wiederkäuen der nämlichen Sache die Wiſſenſchaft verleidet wird, oder, daſs ſie die Hoffnung ganz aufgeben, mit einer Wiſſenſchaft jemals vertraut zu werden, von welcher ſie durch alle ihre Bemühungen keine zuſammenhangende Kenntniſs erlangen, und in welcher ſie, ohne Anſtoſs, keinen Schritt vorwärts machen können.

Noch muſs ich dieſe Klaſſe meiner Leſer vor einem Wahne gewiſſer Leute, die ſich Pädagogen nennen, aber freylich ſchon dadurch einen ziemlich ſichern Maaſsſtab zur Beurtheilung des Werths ihrer ganzen Pädagogik hergeben, warnen, vor dem Wahne nämlich, als

wären junge Leute unter ſechzehn Jahren zur Geometrie noch nicht reif. Es würde mir leicht ſeyn, die Nichtigkeit dieſes Wahns unwiderſprechlich darzuthun. Da mich aber dieſes hier etwas zu weit führen würde, und da ich die gegründete Hoffnung habe, daſs, zum Glücke für die Wiſſenſchaften, die Anzahl dieſer Leute eben nicht groſs ſey, ſo begnüge ich mich damit, mich diesfalls auf meine eigene Erfahrung zu berufen, die mich berechtigt zu verſichern, daſs ich ehedem ſelbſt jungen Leuten von zehn bis zwölf Jahren die Geometrie nach dem Euklides mit dem beſten Erfolge vorgetragen habe.

III. *An die Freunde und Verehrer der Alten.*

Dieſe brauche ich wohl nicht erſt mit vielen Worten auf den Werth eines Buchs aufmerkſam zu machen, das ſich ſeit mehr als zweytauſend Jahren in dem Range eines *Lehrbuchs für die Welt* behauptet hat, und dieſen auch ſo lange nicht verlieren wird, als noch Völker vorhanden ſeyn werden, bey welchen gründliche Kenntniſſe etwas gelten. Es genügt mir alſo ihnen zu ſagen, daſs ich ihnen hier von dieſem *einzigen* Buche eine faſt durchgehends *buchſtäblich getreue* Ueberſezung gebe, die ihnen in jeder andern Hinſicht, die der Sprache ausgenommen, die Stelle des Originals vertreten kann.

Sie werden ohne Zweifel mit mir darüber einig feyn, dafs man nur aus einer folchen Ueberfezung den Geift des Originals vollftändig kennen und beurtheilen lernen könne, und defswegen mein Unternehmen, auch nur in Rückficht auf ihre Zwecke betrachtet, nicht für unnüz halten.

IV. *An die Kunftrichter.*

Diefe hoffe ich zu befriedigen, wenn ich ihnen folgende Fragen beantworte:

1) Warum ich überhaupt die Elemente aufs Neue überfezt habe?

2) Wie ich dabey im Ganzen zu Werke gegangen fey?

3) Warum ich *fo* verfahren fey?

4) Was für eine Ausgabe des griechifchen Texts ich dabey zum Grunde gelegt?

5) Was für andere ich damit verglichen?

6) Welche Ueberfezungen ich dabey zu Rathe gezogen?

7) Was für Abänderungen ich mir erlaubt habe?

8)

8) Warum ich nur diese Bücher und nicht auch die übrigen übersezt liefere?

9) Was ich in dem Commentare zu geben gedenke?

10) Warum ich nicht wenigstens die Hauptsache davon gleich in den Text dieser Uebersezung aufgenommen habe?

Bey der Beantwortung dieser Fragen folge ich der Ordnung, in welcher sie hier stehen.

Was mich überhaupt zu dem Entschlusse, die Elemente aufs neue zu übersezen, bestimmte, war der Mangel an einer Uebersezung, von der man sagen könnte, dass sie in jeder Hinsicht, die der Sprache ausgenommen, das Original, als ein ganz gleichgiltiges Surrogat ersezen könne. Dass die besten der gewöhnlichen Handausgaben, namentlich die *Bärmännische* und *Lorenzische*, diese Eigenschaft nicht haben, wird zwar schon aus einer flüchtigen Vergleichung klar; soll aber in dem Folgenden umständlicher gezeigt werden. Eben dieser Umstand bestimmte dann auch zugleich den Weg, den ich bey meiner Arbeit im Ganzen einzuschlagen hatte, er bestimmte mich nämlich, *gerade eine solche*, d. h. eine fast durchgehends *buchstäblich getreue* Uebersezung des griechischen Texts zu liefern, wobey ich eben so, wie dieser, alle Säze und ihre Verbindungen *bloss durch Worte*, ohne irgend ein anderes Zeichen

zur

zur Abkürzung zu gebrauchen, ausdrückte. Warum ich aber eine ſolche Ueberſezung für nöthig hielt, davon liegt der Grund in einer Bemerkung, die ich ſehr oft zu machen Gelegenheit hatte, daſs nämlich bey jungen Leuten, auch von vorzüglichen Fähigkeiten, die ſich über Dunkelheit und Unbrauchbarkeit der Bärmänniſchen oder Lorenziſchen Ausgabe der Elemente, und namentlich über Unverſtändlichkeit dieſes oder jenes Beweiſes in denſelben, beklagten, alle Dunkelheit verſchwand, und einer vollkommenen Evidenz den Plaz einräumte, ſobald ich ihnen den unverſtändlichen Beweis, ſo, wie er im griechiſchen Texte ſich findet, ausführlich *mit Worten* darlegte. Die Gründe dieſer Erſcheinung liegen zu nahe, als daſs man ſie verfehlen könnte. Die meiſten Wiſſenſchaften weiſs man jezt ſo leicht vorzutragen, daſs junge Leute, auch von mittelmäſſigen Fähigkeiten, jede Zeile, ſo wie ſie ſie geleſen haben, auch ziemlich verſtehen, d. h. ſich vorſtellen, was die Worte ſagen wollen, oder wenigſtens Etwas bey den Worten denken können; daran werden ſie alſo gewöhnt — bey einigen werden ſie jezt, leider! auf eine noch unglücklichere Weiſe daran gewöhnt, von allem, was ſie leſen, *Nichts* zu verſtehen, — bey jedem Saze nach einem Grunde zu fragen, daran werden ſie in der Regel ſonſt nirgends gewöhnt. Dieſe Dispoſition bringen ſie alſo auch zur Geometrie mit, womit ſie gewöhnlich nicht, wie ſie ſollten, den Anfang machen. Sie leſen alſo auch hier Zeile für Zeile, und das

um

um desto flüchtiger, je schneller die durch allgemeine Zeichen ausgedrückten Säze sich lesen lassen, und glauben alles zu verstehen, wenn sie die Glieder eines jeden Sazes so mit einander verbinden, wie die Bedeutung der Zeichen es fordert, ohne sich um die Berufungen zu bekümmern, die neben den Säzen in Parenthesen stehen. Da nun diese Berufungen den Grund von der Verbindung des Subjects und Prädicats im Saze angeben, so können sie von der Nothwendigkeit dieser Verbindung bey keinem der einzelnen Säze ein deutliches Bewufstseyn haben, es kann also auch keiner derselben in ihrem Gedächtnisse haften. Wenn nun gegen das Ende des Beweises zu mehrere Gröſsen, deren Gleichheit im vorigen erwiesen worden, mit einander verwechselt, und auf mancherley Art verbunden werden, so kommen sie zulezt auf einmal zu einem Resultate, das wie ein Zauberbild vor ihnen steht, und von dem sie nicht einsehen, von wannen es komme, oder wie es mit den Prämissen zusammenhange, und durch sie begründet werde. Der Saz bleibt ihnen also, wiefern er ein erwiesener Saz seyn soll, unverständlich. Gegen diesen Fehler der Flüchtigkeit und Eilfertigkeit, der sich bey den besten Köpfen am häufigsten findet, giebt es nun kein besseres Verwahrungsmittel, als die *Langsamkeit des Gangs*, die von Euklids Art, alle seine Schlüsse, der ganzen Länge nach, ohne irgend ein Zeichen der Abkürzung, blofs mit Worten auszudrücken, und auf die früher vorgetragenen Säze, so oft sie bey einem Beweise als Prämis-

miſſen gebraucht werden, durch ausdrückliche Wiederholung derſelben ſich zu berufen, eine nothwendige Folge iſt. Auf dieſem Wege kann auch der Flüchtigſte nur *mit Weile eilen*, und dadurch wird er genöthiget, das Gegenwärtige mit den genauen Beſtimmungen, die die Worte ausdrücken, ſich vorzuſtellen, und des Vergangenen, ſo weit es jedesmal nöthig iſt, ſich deutlich zu erinnern. Und ſo wird er nirgends über Dunkelheit, nirgends über Mangel an Zuſammenhange klagen können, ſondern die Verknüpfung aller Glieder der ganzen Schluſskette eines Beweiſes vom erſten bis auf das lezte wird klar vor ſeinen Augen liegen, ſo klar, als ob er alles, was darin enthalten iſt, mit Händen gegriffen hätte. Hat er es aber einmal ſo weit gebracht, hat er ſich einmal auf dieſem längeren und mühſameren Wege durch einen verwickelten Beweis durchgearbeitet, ſo muſs es ihm das gröſste Vergnügen ſeyn, ſolchen vermittelſt der allgemeinen Zeichen ſich ins Kurze zuſammenzuziehen, und ſo noch einmal zu durchlaufen. Wie muſs er ſich nicht freuen, einen Saz wie z. B. der 12te oder 13te des zweyten Buchs, der in ſeinem Texte *acht* volle Zeilen einnimmt, durch *eine einzige* Zeile:

($\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2 \times AC \times AD$, oder

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2 \times BC \times BD$) ausdrücken zu können! In dieſer Form kann er nun Saz und Beweis gewiſſermaſſen als *ſeine eigene Erſindung* betrachten, und dadurch ſieht er ſeinen Fleiſs belohnt, und wird zu weiteren

Fort-

Fortſchritten ermuntert. Und ſo wird dieſer Gang nicht minder nüzlich für ihn werden, als er ihm angenehm ſeyn muſs. Auf dem umgekehrten Wege verhält ſich alles ganz anders. Er wird viel öfter die Figur mit ſeinen Buchſtaben und Zeichen vergleichen, viel öfter nach dem zurückgelegten Theile des Wegs ſich umſehen, viel öfter ſich aufs neue orientiren müſſen, und doch nie eine gleiche Evidenz erreichen. Auch wird er, wenn er einmal den kürzeren Weg, den er auf ſolche Art, eben nicht ſehr reizend finden konnte, durchlaufen hat, nicht leicht geneigt ſeyn, jezt erſt den längeren, dem Scheine nach noch beſchwerlicheren, einzuſchlagen.

Wie aber dieſer langſamere Gang für die Flüchtigkeit des fähigen Kopfs einen wohlthätigen Zaum abgiebt, ſo wirkt er auf die Trägheit des minder fähigen als ein reizender Sporn. Dieſer wird nämlich durch die dieſem Gange eigenthümliche Feſtigkeit und Sicherheit, durch die im Ganzen deſſelben ſo ſichtbar herrſchende Analogie am Leitfaden der ſyſtematiſchen Einheit, Anfangs faſt ohne ſein Mitwirken, ein Stück weit ſo fortgezogen, daſs er beym Zurückblicken, wenn er nicht eigentlich dumm und völlig unfähig iſt, das, was er ſchon gethan hat, mit Verwunderung über den glücklichen Fortgang betrachten, und ſich ſelbſt in der Stille geſtehen muſs, daſs er ſich das nicht zugetrauet hätte. Dadurch aber muſs ſein Muth belebt, und ſein Selbſtvertrauen angefacht werden,

den, dafs er sich nun zusammennimmt, und den festen Entschlufs fasst, auf einem so sichern, so geebneten Wege weiter vorwärts zu dringen, dann aber auch alle seine Kräfte aufbietet, um an der Ausführung dieses Entschlusses mit beharrlichem Fleisse zu arbeiten. Auf dem umgekehrten Wege verhält sich auch hier alles umgekehrt. Der Träge und Unfähige wird gleich auf der ersten Strecke den ihm aufstossenden Schwierigkeiten erliegen, und Muth und Hoffnung, hier jemals etwas namhaftes auszurichten, ganz und auf immer aufgeben. Aus diesen Gründen ist also der Gang, den Euklides selbst genommen hat, im Durchschnitte für alle der angemessenste.

Noch ein Grund, warum ich diese Art des Vortrags der abgekürzten Darstellung vermittelst der Zeichen vorgezogen habe, ist der, weil ich, wie gleich zu Anfange des ersten Abschnitts bemerkt worden ist, die Elemente in einen weitern Wirkungskreis versezt, nicht blofs für angehende Mathematiker bestimmt, sondern als die *wahre Wissenschaftslehre*, d. h. als das einzige allgemeine Vorbereitungsmittel auf jede Art wissenschaftlicher Beschäftigung angesehen und gebraucht wissen möchte. Diese Absicht aber stehet bey der abgekürzten Darstellung durch die allgemeinen Zeichen nicht zu erreichen. Denn in dieser Form wird das Buch von jedem Nicht-Mathematiker, als etwas blofs für den Mathematiker gehöriges, blofs diesen interessirendes, mit Gleichgiltigkeit angesehen, wird nie

nie ein Gegenſtand ſeiner Aufmerkſamkeit werden, und das unter dem ſcheinbaren Vorwande, als ob dem Buche ſchon durch ſeine Form die beſtimmten Gränzen ſeines Wirkungsraumes in ſo fern abgeſteckt wären, wie fern Beweiſe von dieſer Form, wegen der Verſchiedenheit der Gegenſtände, in keiner andern Wiſſenſchaft ſich nachahmen oder anwenden lieſſen. Der angehende Rechtsgelehrte z. B. könnte mit einigem Scheine ſagen: „Was helfen mir dergleichen Demonſtrationen für meine Praxis, da die Deductionen, die man von mir verlangt, durchaus nichts mit ihnen gemein haben?“ Dies fällt bey dieſer Art des Vortrags weg. Denn ich kann ihm antworten: „allerdings werden ſie dir viel helfen, denn deine Deductionen müſſen, wenn ſie etwas taugen ſollen, ganz die Form dieſer Demonſtrationen haben, müſſen, wie dieſe, aus Beyfall erzwingenden Schlüſſen beſtehen, die, wenn nicht aus unbeſtreitbaren, doch aus unumſtöſslichen Gründen gezogen ſind. Mag dann immerhin *der* Unterſchied zwiſchen beyden bleiben, daſs, während die längſte Demonſtration in den Elementen ſechs Seiten einnimmt, die kürzeſte Deduction vielleicht in eben ſo vielen Bogen enthalten iſt; da er ja doch, wenigſtens *für den Practicanten*, ſeinen Nuzen hat.“

Und ſo, glaube ich, wäre mein Verfahren im Ganzen gerechtfertiget.

Die Ausgabe die ich bey meiner Ueberſe-

ſezung zum Grunde legte, iſt, wie man mit Rechte erwarten kann, die *Gregoryſche:* ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ. *Euclidis quae ſuperſunt omnia, ex recenſione* DAV. GREGORII etc. *Oxoniae* 1703. *fol.* Damit habe ich verglichen die Baſeler Ausgabe: ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛ. ΙΕ. ΕΚ ΤΩΝ ΘΕΩΝΟΣ ΣΥΝΟΥΣΕΙΩΝ. Ἐις τȣ ἀυτȣ τον πρωτον ἐξηγηματων Προκλȣ βιβλ. δ. *Adjecta praefatiuncula, in qua de diſciplinis mathematicis non nihil. Baſileae apud* Jo. HERVAGIUM. 1533. fol.

Von den vielen Ueberſezungen, die ich vor mir hatte, ſind die vorzüglichſten:

a) *lateiniſche:*

die von Clavius, Rom 1589. 2 Bde. 8.
die von Barrow, London 1685. 12.
die von Bärmann, Leipzig 1743. 8.

b) *franzöſiſche:*

die von Dechales, Paris 1683. 8.
die von Rohault, à la Haye 1690. 8.
die von Ozanam, Paris 1693. 8.

c) *teutſche:*

die von Herrn Lorenz. Halle 1781. gr. 8.

Abänderungen habe ich, Druckfehler und andere Kleinigkeiten abgerechnet, mir keine erlaubt, auſſer der einzigen, daſs ich den erſten Saz des zehnten Buchs dem zweyten Saze des zwölften, bey deſſen Beweiſe er zum erſtenmale ge-

gebraucht wird, als einen Lehnſaz angehängt habe, weil ich ihm ſonſt keine ſchicklichere Stelle anzuweiſen wuſste. Dies iſt zwar in ſo fern eine Abweichung von der Gewohnheit des Euklides, als der erwähnte Saz in der Folge auch noch bey andern Beweiſen gebraucht wird, was ſonſt bey den Lehnſäzen nicht der Fall iſt, indeſſen glaube ich doch ſie verantworten zu können.

Daſs ich nur die erſten ſechs Bücher ſammt dem eilſten und zwölften, mit Ausſchlieſſung der übrigen, überſezt habe, geſchah aus keiner andern Urſache, als, weil ich verſichert bin, daſs die übrigen faſt niemand mehr lieſst, und eine neue Ueberſezung ihnen nicht mehrere Leſer verſchaffen würde, weil ſie, wegen der in dieſem Theile ganz veränderten Geſtalt der neueren Mathematik, für den gröſsten Theil der Studirenden wirklich entbehrlich ſind, die wenigen aber, deren Beruf es fordert, ſie auch zu kennen, ſie entweder in den bereits vorhandenen Ueberſezungen, oder in dem griechiſchen Texte ſelbſt leſen können.

Die wichtigſten Gegenſtände des oben verſprochenen Commentars werden folgende ſeyn: zuerſt eine allgemeine Einleitung in das Syſtem des Euklides, mit ausführlicher Erläuterung ſeiner Methode, dann Berichtigungen des Textes, Ergänzungen, die in der Folge vorausgeſezt werden, Erläuterungen, Analyſen verwickelter Beweiſe, Einſchaltungen von Säzen, die

im

im Systeme des Euklides nicht gerade nöthig, aber doch für sich merkwürdig sind, weil sie entweder zur Vervollständigung von Euklids Untersuchungen beytragen, oder sonst in Beziehung auf Theorie oder Anwendung der Geometrie fruchtbar sind, Beyspiele von wichtigen Anwendungen der merkwürdigsten Säze, praktische Auflösungen der Aufgaben, und endlich Ergänzungen des Euklidischen Systems aus den Entdeckungen der späteren Geometer.

Dafs ich nicht die Ausführung wenigstens der wichtigsten dieser Gegenstände gleich in den Text dieser Ueberfezung eingerückt habe, geschahe defswegen, weil es in der Vollständigkeit, die ich mir dabey vorgefezt hatte, sich nicht thun liefs, ohne das Buch mehr zu vergröfsern, als aus andern Gründen räthlich war.

Marburg, den 8ten März 1797.

Vor-

Vorrede
zur zweyten Ausgabe.

In der zweyten Ausgabe dieser Uebersezung sind, wie jeder, der sich die Mühe nehmen will, sie mit der ersten zu vergleichen, bald finden wird, überall, wo es nöthig schien, kleine Berichtigungen und Verbesserungen angebracht worden.

Unter den Uebersezungen, die ich ausser den, in der Vorrede zur ersten Ausgabe genannten, seitdem noch verglichen habe, sind die vorzüglichsten

1) die *lateinische* von **Robert Simson.** Glasgow 1756. 4.

2) die *französische* von **König.** à la Haye 1758. 4.

Unter den vorzüglichsten, bey der ersten Ausgabe schon verglichenen, ist damals aus Versehen anzuführen vergessen worden die *lateinische* von *Tacquet.* Rom 1745. 8. (mit den Anhängen 2 Bde.).

Was den Anhang betrifft, womit diese Ausgabe ist vermehrt worden, so habe ich mich bemühet, in demselben eine Theorie der Parallelen zu geben, die nicht nur den strengsten

For-

Forderungen der geometrischen Methode völlig Genüge leistete sondern auch zugleich von dem Vorwurfe frey wäre, den man einer früheren, im ersten Bande meines mathematischen Lehrbegriffs (*) vorgetragenen, Parallelentheorie hin und wieder gemacht hat, dass sie nämlich *den Anfängern zu schwer* sey.

Ein einfacheres Element, um diese Theorie daraus abzuleiten, konnte unmöglich gefunden werden, als dasjenige, von welchem *Euklid* bey seinem ganzen Systeme ausgegangen ist, nämlich das *gleichseitige Dreyeck*.

Dass in einigen Beweisen etwas lange Schlussreihen vorkommen, ist eben so wenig meine Schuld, als es von mir abhängt, Jemanden, der eine gründliche und vollständige Belehrung sucht, der Mühe zu überheben, diese selbst durchzuführen.

Was durch die Art der Darstellung zur Erleichterung der Uebersicht des Ganzen beygetragen werden konnte, das glaube ich geleistet zu haben.

Wenn daher meine Leser nur die zwey Forderungen erfüllen, die ich gewöhnlich an meine Zuhörer bey dem Anfange des mathematischen Unterrichts zu machen pflege, dass sie nämlich 1) *denken können*, und 2) *denken wollen*, so kann ich ihnen gewiss versprechen, dass sie hier keinen erheblichen Anstand finden werden.

Ein anderer Vorzug, den ich dieser neuen Par-

*) Frankfurth am Mayn 1803. 8.

Parallelentheorie vor jener früheren zu geben bemühet war, besteht darin, daſs ich in der ersten die euklidiſche Definition der Parallelen mit einer andern, der Sache, nach meiner Ueberzeugung, viel angemeſſeneren, vertauſcht habe. *Euklids* Definition der Parallelen wollte mir, aufrichtig zu geſtehen, nie recht gefallen. Das von ihm aufgeſtellte Merkmal des Parallelismus zweyer Linien: „*Nichtzuſammentreffen* „*auch bey einer ins Unendliche fortgeſezten* „*Verlängerung derſelben nach beyden Seiten*", ſchien mir immer in die Klaſſe der Vorſtellungen zu gehören, von welchen *d'Alembert* ſagt: „*qu'elles nous laiſſent tousjours dans l'esprit quel-* „*ques nuages ſur les propoſitions démontrées.*" Solche Vorſtellungen können zwar in Reſultaten, die aus andern einfacheren und deutlicheren Säzen hervorgegangen ſind, bisweilen zu einer vollſtändigen Evidenz gebracht werden, aber zu Principien der Wiſſenſchaften taugen ſie ſchlechterdings nicht.

Wie weit das von mir gewählte Merkmal des Parallelismus die Forderungen des Syſtems zu erfüllen geſchickt ſey, muſs ich der Beurtheilung Anderer überlaſſen. Indeſſen glaube ich eine für das Reſultat dieſer Beurtheilung günſtige Vorbedeutung darin zu erkennen, daſs dieſes Merkmal mich zu einer viel natürlicheren Ordnung und Verbindung der zur Parallelentheorie gehörigen Säze geführt hat, nach welcher gerade der Saz, welcher unter allen die meiſten Schwierigkeiten hat, der *lezte* in der Reihe geworden iſt.

Es sey mir erlaubt, diese Gelegenheit und den übrigen Raum dieses Bogens dazu zu benuzen, um mich über einige Erinnerungen zu erklären, die mir von Gegnern theils über dieses Buch selbst, theils über die vorerwähnte frühere Parallelentheorie gemacht worden sind.

Der verstorbene Geheime Rath *Mönnich* äussert sich in seiner kurzen Geschichte der theoretischen Mathematik *) über meine Uebersezung von Euklids Elementen wie folgt:

„Noch ist Haufs wörtliche Uebersezung der 6 „ersten auch des 11ten und 12ten Buchs zu bemerken, 1799. So weis nun der Nichtgrieche genau, „wie Euklids Vortrag war, der vielleicht nur darum „die abkürzende Citation der §phen nicht brauchte, „weil die alten Bücher, volumina (v. Ernesti Archaeol. II. 1.) nicht umgeschlagen werden konnten, „sondern mit mehr Zeitverlust abgewickelt werden mußten. Des Euklids Geist haben sich wohl Lorenz, „Bärmann und Tacquet durch ihre Abkürzungen nicht „entschlüpfen lassen; auch sind sie für den Lehrling, „wie Hr. H. meint, dadurch nicht unverständlich ge„worden, weil sie von ihm verlangen, beym Euklid „eben so, wie bey neueren darin nicht unverständlichen „Mathematikern, den Obersaz des Syllogismen, „wenn er sich ihnen nicht gleich anbietet, im citirten „Paragraph aufzusuchen."

Diese Aeusserung bezieht sich, wie man leicht sieht, auf S. xxii—xxvi der Vorrede zur er-

*) Lehrb. d. Math. I. Th. II. Abth. 2te Ausg. Berlin 1801. S. 499 f.

ersten Ausgabe meiner Ueberſezung. Den Schlüſſel zur Erklärung dieſer Verirrung hat uns der gute *Mönnich* ſelbſt in folgender Stelle der Vorrede zu der angeführten Ausgabe ſeines Lehrbuchs der Mathematik (S. IV.) gegeben: „Ob — der Leſer die Beſchreibung meines traurigen „Zuſtands als eine Entſchuldigung will gelten laſſen, „wenn hie und da in meinem Buche in Materie und „Form etwas verfehlt iſt, muß ich ſeiner freyen Bil„ligkeit überlaſſen."

Eine ſolche Verrückung des wahren Geſichtspunkts, von welchem ich ausging, um die Gründe von der eingeſchränkteren Nuzbarkeit der Arbeiten meiner verdienten Vorgänger zu zeigen, konnte bey einem Manne von *Mönnich's* Geiſte und von der Richtigkeit im Denken, die er ſich eigen gemacht hatte, nur die Folge ſo heftiger Schmerzen ſeyn, wie die waren, wodurch er in den lezten Jahren ſeines Lebens für Kopfarbeiten leider! ſo oft desorganiſirt wurde.

Denn in der That iſt hier in der Materie und Form gleich viel verfehlt. In der *Materie*, weil es mir auch im Traume nie einfallen konnte, den genannten Herausgebern von *Euklids* Elementen den Vorwurf machen zu wollen, daſs ſie ſich ſeinen Geiſt hätten entſchlüpfen laſſen. In der *Form*, weil der gute Mann, durch ein ſonderbares Verſehen, mir gerade die entgegengeſezte Meinung von derjenigen unterſchiebt, die ich, nach ſeiner Anſicht gehabt haben ſoll, und die er widerlegen will. Er will nämlich ſagen, „ich ſey der Meinung, die genannten „Herausgeber der Elemente ſeyen dem Lehrlin-

„ge dadurch unverständlich geworden, dass u. „s. w. aber diese Meinung sey ungegründet.“ Um dieses auszudrücken musste er seine Worte schlechterdings so stellen: „auch sind sie für den „Lehrling nicht, wie Hr. H. meint, dadurch unver„ständlich geworden ꝛc.“ Denn so, wie er sie gestellt hat, drücken sie das gerade Gegentheil davon aus.

Ich habe allerdings behauptet, sie seyen manchen zufällig unverständlich geworden. Auch habe ich die psychologischen Gründe dieser Unverständlichkeit aufgesucht und nachgewiesen, und das auf eine Art, gegen die ein aufmerksamer Beobachter, der mit den Schwierigkeiten des mathematischen Unterrichts aus eigener Erfahrung bekannt ist, nicht leicht etwas Statthaftes dürfte einzuwenden haben, aber auch zugleich so, dass jenen verdienten Männern dabey schlechterdings nichts zur Last gelegt wurde.

Wäre der gute *Mönnich* noch im Leben, so würde ich ihn freundschaftlich gebeten haben, die Stelle meines Buchs nachzuweisen, wodurch er sich berechtigt geglaubt hätte, die oben erwähnte Aeusserung als meine Meinung anzusehen und darzustellen.

Da aber sein Tod dieses unmöglich gemacht hat, so glaubte ich es der Wahrheit und der guten Sache schuldig zu seyn, um derer willen, die noch leben, diese Erklärung hier niederzulegen.

Der zweyte Gegner, an welchen ich hier noch einige Worte zu richten habe, ist der Verfas-

fasser der Recension von dem ersten Bande meines mathematischen Lehrbegriffs in der neuen Leipziger Literaturzeitung *) (eine andere Recension ist mir bis jezt nicht zu Gesicht gekommen), welcher sich über meine, in diesem Buche vorgetragene, Parallelentheorie folgendermasen äusert:

„Rec. bedauert, dass Hrn. Hfs Wehklagen „über die Blindheit seiner Vorgänger für itzt „und so lange auf ihn selbst zurückfallen muss, „als er sich nicht über die Möglichkeit einer „Figur von vier gleichen Seiten und vier rechten Winkeln ohne Bezug auf die Parallelen „rechtfertigen wird. Der Verf. bedachte nicht, „dass man erst von der Möglichkeit eines Quadrats überzeugt seyn müsse, und übersah so „den Cirkel in seinem Beweise, welcher sonst „scharfsinnig genug ist.“

Was ich hierauf zu antworten habe, ist folgendes:

I. Wehklagen die mir nie *entfallen* sind, können nie auf mich *zurückfallen*. Ich war niemals eingebildet noch ungerecht genug, um meinen Vorgängern Blindheit vorzuwerfen, also konnte ich auch nie Veranlassung finden, über solche zu klagen, noch weniger zu wehklagen. Ich habe blos gegen diejenigen geeifert, welche in Sachen der Geometrie einen *Glauben* einführen wollten, wie ihn die *Dogmatik* predigt. Und dies war ich der Würde der Wissenschaft

*) 35. St. S. 554 ff. von 1805.

schaft schuldig, die meiner Pflege auf einer höheren Lehranstalt anvertrauet ist. Davon brauche ich auch nie etwas zurückzunehmen, weil, was auch das Schicksal meiner Theorie seyn mag, die Maxime immer ihre Richtigkeit behält, dass man die Bemühungen, eine Theorie, welche dem grössesten Theile der Geometrie zur Grundlage dient, zu berichtigen, so lange fortsezen müsse, bis man es endlich wird dahin gebracht haben, sie gegen alle Angriffe sicher zu stellen.

II. Was den Kreis betrifft, den der Rec. in meiner Demonstration gefunden zu haben glaubt, so ist es nicht meine Schuld, dass mir dabey eine Aeusserung von *Kästner* *) einfiel, die ich als eine ganz passende Antwort auf diese Beschuldigung ansehen muss, nämlich:

„Man muß jede gemessene Höhe durch die Refraction verbessern; und die Refraction erkennt und bestimmt man durch Höhenmessungen. Das würde nun wohl ein unastronomischer Logicus, eine offenbahre *petitionem principii* nennen. Aber wer den menschlichen Verstand leiten will, und die Mathematik nicht kennt, in der es der menschliche Verstand gewiß weiter, als irgendwo sonst gebracht hat; der gehört in eine Classe mit unsern jezigen Modeschriftstellern von den schönen Künsten, die nie was Schönes gesehen haben (lebendige Schönheiten nehme ich aus, um nicht unhöflich zu seyn).

III.

*) Astronomische Abhandlungen 1te Samml. Göttingen 1772. S. 1. f. d. Vorr.

III. Daſs dieſe Antwort hier ganz paſſend ſey, zeige ich ſo:

Die Behauptung, daſs in meiner Demonſtration ein Kreis verſteckt liege, konnte nur ein *unmathematiſcher* Logicus aufſtellen. Denn dieſe Behauptung gründet ſich auf den Saz: „*Wer ein Quadrat braucht, um ein Quadrat* „*zu conſtruiren, der dreht ſich in einem Krei*„*ſe*" — einen Saz, welchen, in der Unbeſtimmtheit, wie er hier ausgedrückt iſt, nur ein *unmathematiſcher* Logicus für wahr halten kann. Ein *mathematiſcher* Logicus hingegen muſs wiſſen, daſs zwiſchen Brauchen und Brauchen ein groſser Unterſchied iſt; muſs wiſſen, daſs es zwey ganz verſchiedene Dinge ſind, eine Figur als ein Schema brauchen, an welchem man die Merkmale, die man in den Begriff eines gewiſſen Objects zuſammengefaſst hat, ſich ſo weit realiſirt vorſtellen könne, als ſolches zur Unterſuchung der Eigenſchaften des Objects, vermittelſt gewiſſer Modificationen des Schemas, erforderlich iſt, und eine Figur als ein Schema von dem Begriffe eines gewiſſen Objects ſo brauchen, daſs man im Stande ſey zu demonſtriren, daſs dieſes Schema dem reinen Schema, was die productive Einbildungskraft von eben dieſem Objecte entwirft, genau entſpreche.

Nur die erſte, nicht die lezte Art des Gebrauchs iſt es, die ich mir von dem Quadrate erlaubt habe. Ich nehme an: dieſe Figur iſt ein Quadrat; dann demonſtrire ich: wenn ſie ein Quadrat iſt, ſo muſs ſie dieſe und dieſe beſtimmte

ſtimmte Eigenſchaften haben, und hieraus folgere ich ferner: wenn ſie dieſe Eigenſchaften hat, ſo muſs ſie auf dieſe beſtimmte Weiſe verzeichnet werden können. Zu dieſem Behufe iſt es nicht nöthig, daſs meine Figur ſo beſchaffen ſey, daſs ich von ihr beweiſen könne, ſie ſey ein Quadrat; ſondern es iſt völlig zureichend, irgend einen von vier Seiten eingeſchloſſenen Raum, den ich, vermöge der mir urſprünglich beywohnenden intuitiven Vorſtellung von dem allbefaſſenden Raume und den mannigfaltigen Arten ſeiner Begrenzung auf mehr als eine Weiſe zu Stande bringen kann, für ein Quadrat anzunehmen. Ob die Seiten dieſer Figur alle gleich, ob ihre Winkel alle rechte ſeyen, darum brauche ich mich vor der Hand gar nicht zu bekümmern. Genug, ich nehme an, daſs ſie es ſeyen, und ich bin mir bewuſst, daſs dieſe Vorausſezung mich zu keinem Irrthume verleiten könne, ſo lange ich in der Form der daraus abzuleitenden Schlüſſe nichts verſehen werde. Hier gilt ganz die Formel des *Archimedes*: *Λαμβανω δε ταυτα*! Hier iſt alſo auch kein Schatten von einem Kreiſe im Beweiſe.

Wollte hingegen Jemand, ehe er die Möglichkeit des Quadrats gezeigt hätte, den pythagoriſchen Lehrſaz beweiſen, und aus dieſem alsdann gewiſſe Eigenſchaften des Quadrats ableiten, der würde ſich die zweyte Art des Gebrauchs von dem Quadrate erlauben, und den Vorwurf, daſs er ſich in einem Kreiſe drehe, auf keine Weiſe von ſich ablehnen können, weil es zum Beweiſe des pythagoriſchen Lehrſazes ſchlech-

schlechterdings nothwendig ist, eine Figur zu Stande zu bringen, von welcher man darthun kann, sie sey ein Quadrat, d. h. sie entspreche in der That dem reinen Schema des Quadrats, das wir in unserer productiven Phantasie herumtragen.

Ein *mathematischer* Logicus muss ferner den *Euklid* kennen, und wer den *Euklid* kennt, muss wissen, es könne kein Saz wahr seyn, welcher so beschaffen ist, dass er, wenn er wahr wäre, *Euklids* ganzes System zertrümmern würde.

Dass aber der oben ausgehobene Saz, welchen der Rec. annehmen muss, wenn er in meiner Demonstration einen Kreis finden will, in der That von dieser Beschaffenheit sey, lässet sich leicht so zeigen:

Wenn Jemand den Saz annimmt: „*Wer* „*ein Quadrat braucht*, *um ein Quadrat zu con*„*struiren*, *der drehet sich in einem Kreise*"; so muss er, um consequent zu bleiben, nothwendig auch den Saz annehmen: „*Wer ein* „*Dreyeck braucht*, *um ein Dreyeck zu construi*„*ren*, *der dreht sich in einem Kreise.*" Soll aber dieser Saz wahr seyn, so stürzt *Euklids* ganzes System ohne Rettung zusammen. Denn *Euklid* befindet sich in Ansehung des Dreyecks ganz im nämlichen Falle, in welchem ich mich in Ansehung des Quadrats befand. Er braucht das Dreyeck völlig eben so zur Construction des Dreyecks, wie ich das Quadrat zur Construction des Quadrats gebrauchte. Schon der vierte Saz seines ersten Buchs und nachher eben so

so die Säze 8. 16. 17. 18. 19. 20. 21. sind vom *Dreyecke überhaupt* d. h. von dem Dreyecke, bey welchem jedes Verhältniſs der Seiten Statt finden kann, was innerhalb der Grenzen der Möglichkeit dieser Figur liegt, ausgesagt und bewiesen, und doch kann er die Construction des *Dreyecks überhaupt* nicht eher als im 22sten Saze zeigen, doch kann er die Grenzen der Möglichkeit dieser Figur nicht anders, als vermittelst des 20sten Sazes bestimmen, doch kann er das Gesez, welchem drey gerade Linien, aus denen ein Dreyeck zusammengesezt werden soll, in Ansehung ihrer Gröſse unterworfen sind, um die Erfüllung der zur Construction des *Dreyecks überhaupt* erforderlichen Bedingungen möglich zu machen, nicht eher als in und mit seinem 20sten Saze finden. Muſs man also, wie der Rec. meint, *erst von der Möglichkeit des Dreyecks überhaupt versichert seyn*, ehe man im Stande ist, irgend eine Untersuchung über die Eigenschaften desselben mit Erfolg anzustellen, so liegt hier in *Euklids* Systeme ein, bis jezt ganz unbemerkt gebliebener, Grundfehler, der so unheilbar ist, daſs uns nichts anders übrig bleibt, als das Ganze, wie ein nichtiges Hirngespinst, wegzuwerfen. Das mag mir dann ein *mathematischer* Logicus verantworten!

Ich könnte also — dies ist das Resultat dieser Deduction — dem Recensenten erwiedern: „Meine, aus der Lehre von den Tangenten „des Kreises abgeleitete, Parallelentheorie wird „so lange unerschütterlich stehen, als der Rec. „nicht eine andere Lücke in derselben, als der

ver-

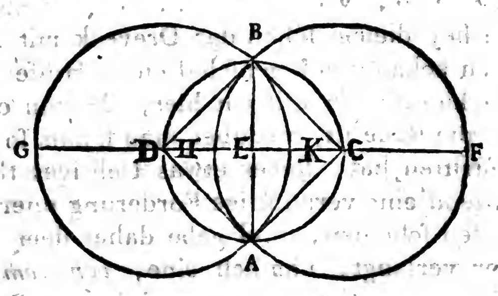
„vermeinte Kreis ist, wird nachweisen kön-
„nen."

Da indessen doch der Rec. vielleicht mit einigem Scheine, dagegen noch einwenden könnte: „Was von dem Dreyecke als der ein-„fachsten unter allen Figuren gilt, das gilt „nicht eben so auch von einer zusammengesez-„teren Figur, wie das Quadrat ist, eben weil „man bey diesem schon das Dreyeck mit allen „seinen bekannten Eigenschaften zu Hülfe neh-„men kann"; so will ich hier, da von einer Sache die Rede ist, worüber man schon so lange gestritten hat, lieber etwas Uebriges thun, als irgend eine vernünftige Forderung unerfüllt zu lassen scheinen, und gebe daher dem Rec. was er verlangt, nämlich eine, *von dem Begriffe der Parallelen ganz unabhängige*, Rechtfertigung der Möglichkeit einer Figur von vier gleichen Seiten und vier rechten Winkeln, und das auf eine gedoppelte Art, wie ich auf zwey ganz verschiedenen Wegen dazu gelangt bin.

Die eine so ausgeführt, wie sie in meinen Lehrbegriff paſst, und mit Angabe der Zahlen nach welchen sie in denselben einzureihen ist, wird jezt sogleich folgen; die andere, wie sie aus der Grundlage meiner neuesten Parallelentheorie hervorgeht, wird er in den Zusäzen bey S. III des Anhangs finden.

Lehrsaz 60.

§. 156. Wenn die Centrallinie zweyer Kreislinien dem Halbmesser der einen und der halben Quadrantensehne der andern gleich ist, so wird die kleinere durch die grösere halbirt, und von der gröseren durch die kleinere ein Quadrante abgeschnitten.



Hypothesis.

1) Die Kreislinie AFBH hat zum Mittelpunkte C; die ACBD hat zum Mittelpunkte E, die Centrallinie beyder ist also CE, und diese ist zugleich der Halbmesser der Kreislinie ACBD.

2) Diese Linie CE ist der halben Quadrantensehne der Kreislinie AFBH gleich.

Saz.

1) Die Kreislinie AFBH ist gröser als die ACBD.

2) Die Kreislinie AFBH halbirt die ACBD.

3) Die Kreislinie ACBD schneidet von der AFBH einen Quadranten ab.

Beweis.

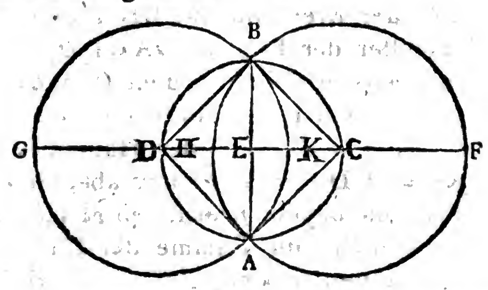
1) Da (p. hyp.) die Centrallinie CE dem Halb-

Halbmesser der Kreislinie ACBD und der halben Quadrantensehne der Kreislinie AFBH gleich ist, so ist der Halbmesser der lezteren, als Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreyecks, dessen eine Kathete der Centrallinie gleich ist, (§. 134. Z. 4. §. 80. Z. 6. I.) grösser, als diese Centrallinie (§. 80. Z. 4. §. 81.). Folglich ist der Halbmesser der Kreislinie AFBH grösser, als der Halbmesser der Kreislinie ACBD (§. 34.), und mithin jene grösser, als diese (§. 129. Z. 7.).

2) Da (p. dem 1.) der Halbmesser der Kreislinie AFBH grösser, als der Halbmesser der Kreislinie ACBD, dieser leztere aber (p. hyp.) der Centrallinie beyder Kreislinien gleich ist, so ist noch vielmehr die Summe der Halbmesser beyder Kreislinien grösser, als ihre Centrallinie (§. 39.).

3) Zugleich aber ist der Unterschied des Halbmessers der Kreislinie AFBH (als Hypotenuse) und ihrer halben Quadrantensehne (als der einen Kathete des rechtwinkeligen Dreyecks, welches die Hälfte dessen ist, das die beyden Halbmesser der Kreislinie AFBH mit ihrer Quadrantensehne einschliessen [§. 134. Z. 4. §. 80. Z. 6. I.]) kleiner, als diese halbe Quadrantensehne. Denn es sey in dem eben erwähnten Dreyecke die halbe Quadrantensehne $= q$, und die Hypotenuse $= h$; wäre nun nicht $h - q < q$, so wäre entweder $h - q > q$, oder $h - q = q$ (§. 22.). Im ersten Falle hätte man $h > 2q$ (§. 31.). Da nun (p. hyp.) in dem rechtwinkeligen Dreyecke, welches die Halbmesser der Kreislinie AFBH mit ihrer Quadrantensehne einschlies-

ſchlieſſen, h der Halbmeſſer, und 2 q die Quadrantenſehne iſt, ſo wäre in einem rechtwinkeligen Dreyecke die eine Kathete gröſser, als die Hypotenuſe. Im andern Falle hätte man $h = 2q$ (§. 28.) d. h. die eine Kathete der Hypotenuſe gleich; beydes gegen §. 80. Z. 4. §. 81., welches unmöglich iſt.



4) Da nun (p. hyp.) die halbe Quadrantenſehne der Kreislinie AFBH dem Halbmeſſer der Kreislinie ACBD und zugleich der Centrallinie beyder Kreislinien gleich iſt, ſo iſt der Unterſchied der Halbmeſſer beyder Kreislinien kleiner, als der Abſtand ihrer Mittelpunkte (p. dem. 3. §. 137.). Da aber (p. dem. 2.) auch die Summe dieſer Halbmeſſer gröſser iſt, als der Abſtand der Mittelpunkte, ſo müſſen die beyden Kreislinien AFBH, ACBD einander in zwey Punkten ſchneiden, wovon der eine über, der andere unter der Centrallinie liegt (§. 62.).

5) Sind nun dieſe Punkte A, B, ſo ſind, wenn man an ſie aus dem Mittelpunkte C die Linien CA, CB zieht, dieſe Halbmeſſer der Kreislinie AFBH (§. 59.).

6) Wird nun der Halbmeſſer CE verlängert,

gert, bis er der Kreislinie ACBD in D begegnet, und hierauf aus D mit einem Halbmesser = CA die Kreislinie AGBK beschrieben, so muss diese die Kreislinie ACBD in denselben Punkten A, B schneiden, weil jezt auf der linken Seite des Mittelpunkts E die Bedingungen des Schneidens eben so, wie auf der rechten, Statt finden (§. 62.).

7) Zieht man daher aus dem Mittelpunkte D an die Durchschnittspunkte die Halbmesser DA, DB, ferner aus dem Mittelpunkte E die Halbmesser EA, EB, so ist AC = BC, AE = EB (§. 59. Z. 1.) EC = EC; folglich AEC = BEC (§. 69. Z. 1.).

8) Eben so ist erweislich, dass BED = BEC sey; folglich ist auch AEC = BED (§. 25.).

9) Nun ist (p. constr.) DC eine gerade Linie; folglich ist auch AB eine solche (§. 77. Z. 5.).

10) Es ist aber AB = EA + EB; folglich ist AB ein Durchmesser der Kreislinie ACBD (§. 59.), und mithin wird diese von der Kreislinie AFBH, welche sie in den Endpunkten dieses Durchmessers schneidet, also die kleinere von der grösseren (p. dem. 1.), halbirt (§. 134.).

11) Da aber (p. hyp.) der Halbmesser der Kreislinie ACBD der halben Quadrantensehne der Kreislinie AFBH gleich ist, so ist der Durchmesser von jener der Quadrantensehne von dieser gleich (§. 26.). Folglich ist AB die Quadrantensehne der Kreislinie AFBH, und AHB ein Quadrante derselben. Demnach wird von der grösseren Kreislinie AFBH durch die kleinere ACBD ein Quadrante abgeschnitten, w. z. e. w.

Zus.

Zuſ. 1. Wenn daher die Centrallinie zweyer Kreislinien ihrer Quadrantenſehne gleich iſt, ſo iſt auch ihre gemeinſchaftliche Sehne eben dieſer Quadrantenſehne gleich (p. dem. 11.).

Zuſ. 2. Demnach iſt die Quadrantenſehne doppelt ſo groſs, als ihr Abſtand vom Mittelpunkte des Kreiſes (Zuſ. 1.).

Zuſ. 3. Wenn demnach zwey Kreislinien ihre Quadrantenſehne zur Centrallinie haben, ſo ſchlieſſen die von den Endpunkten der Centrallinie an die Endpunkte der gemeinſchaftlichen Sehne gehenden geraden Linien das Quadrat des Halbmeſſers dieſer Kreislinien ein.

Denn dieſe Linien ſind (p. dem. 6. 7. 8.) als Halbmeſſer von einerley Kreiſe anzuſehen, folglich einander gleich (§. 59. Z. 1.). Da nun (p. hyp.) CD die Quadrantenſehne dieſer Kreislinien iſt, ſo iſt jeder der Winkel bey A, B ein rechter. Da aber (Zuſ. 1.) auch AB die Quadrantenſehne iſt, ſo iſt auch jeder der Winkel bey C, D ein rechter (§. 134. Z. 4.), folglich ACBD das Quadrat des Halbmeſſers AC (§. 155. a.).

Zuſ. 4. Das Quadrat des Halbmeſſers einer Kreislinie hat alſo die Quadrantenſehne eben dieſer Kreislinie zur Diagonale (Zuſ. 3. §. 58.).

Zuſ. 5. Die Diagonalen des Quadrats halbiren einander lothrecht und ſind einander gleich (p. dem. 10. Zuſ. 3. 4.).

Zuſ. 6. Auch die vier Quadrantenſehnen des Kreiſes ſchlieſſen ein Quadrat, das Quadrat der Quadrantenſehne ein.

Denn da (p. dem. 8. 9. 10.) bey dem Punkte

E

E rechte Winkel sind, so sind die Linien AC, BC, BD, AD Quadrantensehnen des Kreises ACBD; also (Zus. 3.) ADBC das Quadrat der Quadrantensehne dieses Kreises.

Zus. 7. Demnach ist das Quadrat von dem Halbmesser eines Kreises gleich dem Quadrate der Quadrantensehne eines andern, der die halbe Quadrantensehne des ersten zum Halbmesser hat (Zus. 3. 6.).

Hoffentlich wird also nun der Rec. meine Parallelentheorie nicht weiter in Anspruch nehmen.

Aber auch mit meiner Orthographie ist eben dieser Rec. unzufrieden, wie er am Ende der Recension durch folgende Aeusserung zu erkennen gegeben hat:

„Ungern liest man in einem Buche von so „elegantem Ausdruck spiz, sezen, schenkelig, „winkelig st. spitz, winklicht etc."

Da nun eben diese Orthographie auch in diesem Buche beybehalten ist, so wird es mir zukommen sie hier zu rechtfertigen.

Was nun den Gebrauch des *Z* statt des *TZ* betrifft, so begreife ich so wenig wie und warum dieser ihm unangenehm seyn könne, dass ich darauf nichts anders zu erwiedern weiss, als die Versicherung, dass das Gegentheil mir nicht bloss unangenehm, sondern ganz unleidlich sey. Den Grund von dieser Antipathie kann ich ihm genau angeben, weil ich mir seiner ganz deutlich bewusst bin. Er ist kein anderer, als der, weil ich es für unvernünftig halte, ein einfaches

Zeichen eines einfachen Lauts mit einem andern einfachen Zeichen eines zusammengesezten Lauts, das jenes schon als einen Theil von sich enthält, zu combiniren, um hernach das zusammengesezte Zeichen zu Bezeichnung eben desselben zusammengesezten Lauts zu gebrauchen, zu dessen Bezeichnung das zweyte einfache Zeichen, vermöge seiner ursprünglichen Bestimmung, für sich allein schon gänzlich zureichend war.

Schon als einem Kinde von sechs Jahren war mir das *TZ* in meinem ganzen ABC Buche der gröfste Greuel, und durch keine Strafen des Schulmeisters konnte ich jemals dahin gebracht werden, dies verwünschte Zeichen zu schreiben. So sehr sträubte sich schon im Kinde die Vernunft gegen alles, was ihr zuwider war! Jezt bin ich wohl zu alt, so etwas noch zu lernen.

Dagegen war es *mir* sehr unangenehm in dieser Recension *Hypothenuse* statt: *Hypotenuse* zu lesen, weil ich dadurch überzeugt werden mufste, dafs der Rec. den Euklides (in der Grundsprache) nicht kenne. Denn: *ex ungue* — !

Was endlich die Art, die von den Substantiven Schenkel und Winkel abgeleiteten Aejective zu schreiben, betrifft, so thut es mir leid, dem Rec. sagen zu müssen, dafs er schon vor zwanzig Jahren aus *Adelung's* Schriften hätte lernen können, dafs bey allen von Substantiven gebildeten Adjectiven die Endung in *icht* *Aehnlichkeit* mit dem Objecte, was das Sub-

stan-

ſtantiv bezeichnet, dagegen die Endung in *ig* einen *Gehalt* von dieſem Objecte bezeichnet z. B. *waldicht — einem Walde ähnlich; waldig — mit Wäldern bewachſen, Wälder enthaltend.* Demnach wäre alſo ein rechtwinklichtes Dreyeck, wie der Rec. geſchrieben wiſſen will, ein Dreyeck, das einem rechten Winkel ähnlich wäre???

Daſs nun der Rec. dieſe Gelegenheit, ſich beſſer zu unterrichten, verſäumt hat, würde man ihm verzeihen können, ſo lange er nicht ſelbſt als Schriftſteller auftreten, und andere in Sachen dieſer Art meiſtern wollte. Daſs er aber einem Manne, der ſeine Mutterſprache ſo gut, wie eine gelehrte Sprache ſtudirt hat, zumuthen will, ſeine Irrthümer, auf ſein Wort, als Verbeſſerungen aufzunehmen, dies iſt ſchwer zu entſchuldigen. Das gelindeſte, was man darüber ſagen kann, iſt wohl das bekannte: „*Si tacuiſſes, Grammaticus manſiſſes!*"

Eine andere, noch merkwürdigere, Stelle dieſer Recenſion, die dem Recenſenten, als *Philoſophen*, das nämliche Urtheil ſpricht, übergehe ich hier gerne, weil der Inhalt dieſes Buchs ihre Beleuchtung nicht nothwendig erfordert.

Dagegen darf ich den Beobachtern der literäriſchen Cultur in Teutſchland die Anekdote nicht vorenthalten, daſs dieſes Buch in einem der erſten teutſchen Staaten mehreren, von der hieſigen Univerſität zurückkehrenden, Jünglingen weggenommen worden iſt, weil der Cenſor in der Schilderung vom Geiſte des Vaters der

Geometrie, S. VIII. IX der Vorrede zur ersten Ausgabe, eine *Blasphemie* zu erkennen wähnte.

Möge doch dieser Geist der Wahrheit den Werken der Finsterniss, deren furchtbare Macht uns jezt von Neuem wieder mehr als jemals zu bedrohen scheint, fernerhin kräftig entgegenwirken!

Marburg in den Pfingstferien 1807.

Joh. Karl Friedr. Hauff,
Professor der Mathematik und Physik.

Ta-

TAFEL
der mathematiſchen Zeichen.

Begriff.	*Zeichen.*	*Gebrauch.*
Gleichheit	$=$	$A = B$, d. i. die Gröſse A iſt der B gleich.
Ungleichheit	$\underline{=}$	$A \underline{=} B$, d. i. A und B ſind ungleich.
Aehnlichkeit	$\backsim$	$A \backsim B$, d. i. die A iſt der B ähnlich.
Congruenz	$\cong$	$A \cong B$, d. i. die A iſt der B congruent.
Das Gröſsere	$>$	$A > B$, d. i. die A iſt gröſser als die B.
Das Kleinere	$<$	$A < B$, d. i. die A iſt kleiner, als die B.
Addition	$+$	$A + B$, d. i. A und B zuſammen.
Subtraction	$-$	$A - B$, d. i. A weniger B.
Multiplication	$\times$ oder (.)	$A \times B$, oder A. B, d. i. A multiplicirt mit B.
Diviſion	—	$\frac{A}{B}$ d. i. A dividirt durch B.
Rechter Winkel.	R.	$ABC = R$, d. i. ABC iſt ein rechter Winkel.
Stumpfer Winkel.	$> R$	$ABC > R$, d. i. ABC iſt ein ſtumpfer Winkel.
Spizer Winkel.	$< R$	$ABC < R$, d. i. ABC iſt ein ſpizer Winkel.
Parallelismus	$\#$	$AB \# CD$, d. i. die AB iſt der CD parallel.
Quadrat	—q oder —²	$\overline{AB}^{q}$, d. i. das Quadrat von AB.
Würfel	—c oder —³	$\overline{AB}^{c}$, d. i. der Würfel von AB.
Verhältniſs	(:)	A : B, d. i. A verhält ſich zu B.
Zweymal höheres Verhältniſs.	$\overline{}^{2} : \overline{}^{2}$	$\overline{AB}^{2} : \overline{CD}^{2}$, d. i. das zweymal höhere Verhältniſs der Gröſse AB zu der CD.
Dreymal höheres Verhältniſs.	$\overline{}^{3} : \overline{}^{3}$	$\overline{AB}^{3} : \overline{CD}^{3}$, d. i. das dreymal höhere Verhältniſs der Gröſse AB zu der CD.
Rechteck aus zwey Linien.	$- \times -$	$AB \times CD$, d. i. das Rechteck aus AB und CD.

EU-

EUKLIDS ELEMENTE.

ERSTES BUCH.

Erklärungen.

1. Ein Punkt ist, was keine Theile hat.
2. Eine Linie ist eine Länge ohne Breite.
3. Die Gränzen der Linie sind Punkte.
4. Eine gerade Linie ist eine solche, die gegen alle in ihr befindlichen Punkte einerley Lage hat.
5. Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.
6. Die Gränzen der Fläche sind Linien.
7. Eine ebene Fläche ist eine solche, die gegen alle in ihr befindlichen Linien einerley Lage hat.
8. Ein ebener Winkel ist die Neigung zweyer Linien gegeneinander, die in einer Ebene zusammentreffen, ohne in *einer* geraden Linie zu liegen.
9. Wenn die Linien, welche den Winkel einschliessen, gerade Linien sind, so heisst der Winkel ein geradeliniger.
10. Wenn eine gerade Linie auf einer andern so aufgestellt ist, dass sie mit ihr gleiche Nebenwinkel macht, so ist jeder der gleichen Winkel ein *rechter*, und die solchergestalt aufgestellte gerade Linie heisst auf der andern *lothrecht*.

11. Ein *ſtumpfer* Winkel heiſst ein ſolcher, der gröſser, als ein rechter, iſt.

12. Ein *ſpizer* aber ein ſolcher, der kleiner, als ein rechter, iſt.

13. Die *Gränze* iſt das Aeuſſerſte eines Dings.

14. Eine *Figur* iſt, was in eine oder einige Gränzen eingeſchloſſen iſt.

15. Ein *Kreis* iſt eine von einer einzigen Linie, welche der *Umkreis* (die *Peripherie*) heiſst, ſo eingeſchloſſene Figur, daſs alle von einem innerhalb der Figur befindlichen Punkte an den Umkreis gehende gerade Linien einander gleich ſind.

16. Dieſer Punkt heiſst des Kreiſes *Mittelpunkt.*

17. Der *Durchmeſſer* des Kreiſes iſt eine durch den Mittelpunkt gehende, und auf beyden Seiten durch den Umkreis begränzte gerade Linie, welche auch den Kreis halbirt.

18. Ein *Halbkreis* iſt eine von dem Durchmeſſer und dem durch dieſen abgeſchnittenen Kreisbogen eingeſchloſſene Figur.

19. Ein *Abſchnitt* des Kreiſes iſt, was zwiſchen einer geraden Linie und einem Kreisbogen eingeſchloſſen iſt.

20 *Geradlinige* Figuren ſind ſolche, welche von geraden Linien eingeſchloſſen ſind.

21. *Dreyſeitige*, welche von dreyen

21. *Vierſeitige*, weche von vieren

23. *Vielſeitige*, welche von mehr, als vier, geraden Linien eingeſchloſſen ſind.

24. Von den dreyſeitigen Figuren iſt diejenige ein *gleichſeitiges Dreyeck*, welche drey gleiche Seiten hat.

25. Ein *gleichſchenkeliges* diejenige, welche nur zwey gleiche Seiten hat.

26. Ein

26. Ein *ungleichseitiges* diejenige, welche drey ungleiche Seiten hat.

27. Ferner ist von den dreyseitigen Figuten diejenige ein *rechtwinkeliges* Dreyeck, welche einen rechten Winkel,

28. Diejenige ein *stumpfwinkeliges*, welche einen stumpfen,

29. Diejenige ein *spizwinkeliges*. welche drey spize Winkel hat.

30. Von den vierseitigen Figuren ist diejenige ein *Quadrat*, welche gleichseitig und rechtwinkelig ist.

31. Ein *längliches Viereck* (*Rechteck*), welche zwar rechtwinkelig aber nicht gleichseitig ist.

32. Ein *Rhombus* (eine *Raute*), welche zwar gleichseitig aber nicht rechtwinkelig ist.

33. Eine *Rhomboide*, in welcher die entgegengesezten Seiten und Winkel einander gleich sind, die aber weder gleichseitig noch rechtwinkelig ist.

34. Die übrigen vierseitigen Figuren, ausser den bisherigen, heissen *Trapezien*.

35. *Parallele* Linien sind solche gerade Linien, die in einerley Ebene liegen, und, so weit man sie nach beyden Seiten verlängern mag, doch an keiner Seite zusammentreffen.

Forderungen.

1. Von jedem Punkte nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen.

2. Eine begränzte gerade Linie stetig in gerader Richtung zu verlängern.

3. Aus jedem Mittelpunkte und mit jeder Weite einen Kreis zu beschreiben.

Grundsäze.

1. Dinge, die *einem* dritten gleich sind, sind einander selbst gleich.
2. Wenn man zu Gleichem Gleiches hinzusezt, so sind die Ganzen gleich.
3. Wenn man von Gleichem Gleiches wegnimmt, so sind die Reste gleich.
4. Wenn man zu Ungleichem Gleiches hinzusezt, so sind die Ganzen ungleich.
5. Wenn man von Ungleichem Gleiches wegnimmt, so sind die Reste ungleich.
6. Die Doppelten von *einem* dritten sind einander gleich.
7. Die Hälften von *einem* dritten sind einander gleich.
8. Dinge, die einander decken, sind einander gleich.
9. Das Ganze ist grösser als sein Theil.
10. Alle rechten Winkel sind einander gleich.
11. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, dass die beyden innern, an einerley Seite der schneidenden Linie liegenden, Winkel kleiner als zwey rechte sind, so treffen die beyden geraden Linien, wenn man sie so weit, als nöthig ist, verlängert, an eben der Seite zusammen, an welcher die Winkel liegen, die kleiner als zwey rechte sind.
12. Zwey gerade Linien schliessen keinen Raum ein.

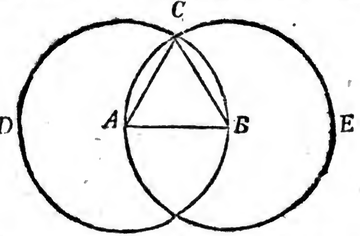
---

1. *Saz.*

1. *Saz.*

Aufgabe. Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie ein gleichſeitiges Dreyeck zu beſchreiben.

Es ſey AB eine gegebene begränzte gerade Linie, und man ſoll auf derſelben ein gleichſeitiges Dreyeck beſchreiben.



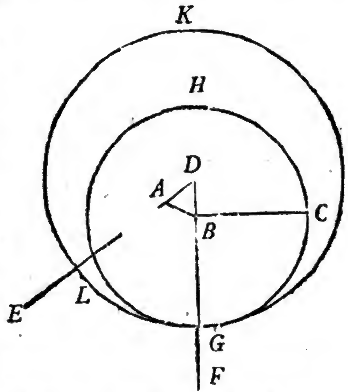
Auflöſung. Man beſchreibe aus dem Mittelpunkte A, mit der Weite AB (3. Ford.) einen Kreis BCD, und aus dem Mittelpunkte B mit der Weite BA einen Kreis ACE, alsdann ziehe man von dem Punkte C, in welchem die beyden Kreiſe einander ſchneiden, nach den Punkten A und B die Linien CA, CB.

Beweis. Weil der Punkt A des Kreiſes CDB Mittelpunkt iſt, ſo iſt die Linie AC (15. Erkl.) der Linie AB gleich. Ferner, weil der Punkt B des Kreiſes CAE Mittelpunkt iſt, ſo iſt die Linie BC der BA gleich. Es iſt aber gezeigt worden, daſs auch die Linie AB der AB gleich ſey; folglich ſind die beyden CA, CB der dritten AB gleich. Dinge aber die *einem* dritten gleich ſind, ſind einander ſelbſt gleich; folglich iſt auch die Linie CA der CB gleich, und mithin ſind die drey Linien AC, AB, BC einander gleich. Demnach iſt (24. Erkl.) das Dreyeck ABC gleichſeitig, auch iſt es auf der gegebenen begränzten geraden Linie AB beſchrieben, was zu verrichten war.

2. *Saz.*

Aufgabe. An einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ſezen, die einer gegebenen geraden Linie gleich ſey.

Es ſey der gegebene Punkt A, die gegebene gerade Linie BC, und man ſoll an den Punkt A eine der BG gleiche gerade Linie ſezen.



Auflöſung. Man ziehe (1. Ford.) von dem Punkte A an den Punkt B die Linie AB, beſchreibe (1. Saz) auf derſelben das gleichſeitige Dreyeck DAB, und verlängere die Linien DA, DB in gerader Richtung nach E, F. Hierauf beſchreibe man aus dem Mittelpunkte B, mit der Weite BC, (3. Ford.) den Kreis CGH, und aus dem Mittelpunkte D, mit der Weite DG, den Kreis GKL.

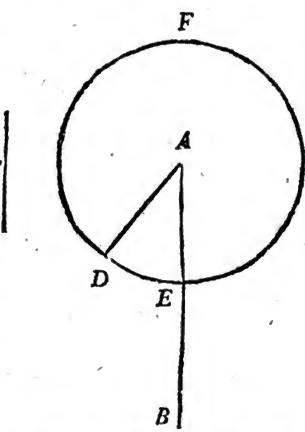
Beweis. Weil der Punkt B des Kreiſes CGH Mittelpunkt iſt, ſo iſt (15. Erkl.) die Linie BC der BG gleich. Ferner, weil der Punkt D des Kreiſes GKL Mittelpunkt iſt, ſo iſt die Linie DL der DG gleich. Von dieſen aber iſt das Stück DA dem DB gleich, folglich iſt (3. Grundſ.) auch der Reſt AL dem Reſte BG gleich. Es iſt aber gezeigt worden, daſs der Linie BG die BC gleich ſey. Die beyden Linien AL, BC alſo ſind der dritten BG gleich. Dinge aber, die *einem* dritten gleich ſind, ſind einander ſelbſt gleich; folglich iſt auch die Linie AL der BC gleich. Demnach iſt an den gegebenen Punkt A eine der gegebenen BC gleiche gerade Linie AL geſezt worden, w. z. v. w.

3. *Saz.*

Aufgabe. Wenn zwey ungleiche gerade Linien gegeben ſind, von der gröſsern ein der kleinern gleiches Stück abzuſchneiden.

Es

Es seyen die zwey gegebenen ungleichen geraden Linien AB, C und zwar sey AB die grössere, und man soll von der grössern AB ein der kleinern C gleiches Stück abschneiden.



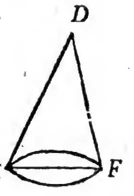
Auflösung. Man seze an den Punkt A eine der C gleiche Linie AD (2. Saz.) und beschreibe aus dem Mittelpunkte A mit der Weite AD den Kreis DEF (3. Ford.)

Beweis. Weil der Punkt A des Kreises DEF Mittelpunkt ist, so ist die Linie AE der AD gleich; folglich sind die beyden AE, C der dritten AD gleich; mithin ist auch die Linie AE der C gleich. Demnach ist, da zwey ungleiche gerade Linien AB, C gegeben waren, von der grössern AB ein der kleinern C gleiches Stück AE abgeschnitten worden. w. z. v. w.

4. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn in zwey Dreyecken zwey und zwey Seiten und die von ihnen eingeschlossenen Winkel einander gleich sind, so ist auch die Grundlinie des einen der Grundlinie des andern gleich und die ganzen Dreyecke, wie auch die übrigen Winkel beyder, welche gleichen Seiten gegenüber liegen, sind einander gleich.

Es seyen in den zwey Dreyecken ABC, DEF, die zwey Seiten AB, AC den zwey Seiten DE, DF stückweise gleich, die AB nämlich der DE und die AC der DF, auch sey der Winkel BAC dem Winkel EDF gleich, so behaupte ich, dass auch die Grundlinie BC der Grundlinie EF, und





und das ganze Dreyeck ABC dem ganzen Dreyeke DEF gleich ſey, wie auch, daſs die übrigen Winkel der beyden Dreyecke, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen, einander ſtückweiſe gleich ſeyen, der ABC nämlich dem DEF, und der ACB dem DFE.

Beweis. Wenn man das Dreyeck ABC auf das Dreyeck DEF, ſo legt, daſs der Punkt A auf den Punkt D, und die Linie AB auf die DE zu liegen kommt, ſo wird der Punkt B auf den Punkt E fallen, weil die Linie AB der DE gleich iſt. Wenn aber die Linie AB ſolchergeſtalt auf die DE paſst, ſo wird auch die AC auf die DF paſſen, weil der Winkel BAC dem Winkel EDF gleich iſt. Daher wird auch der Punkt C auf den Punkt F fallen, weil die Linie AC der DF gleich iſt. Aber der Punkt B fiel, nach dem vorigen, auf den Punkt E, folglich wird die Grundlinie BC die EF decken. Denn wenn der Punkt B auf den E, und der Punkt C auf den F fiele, und doch die Grundlinie BC die EF nicht deckte, ſo müſsten zwey gerade Linien einen Raum einſchlieſſen, welches (12 Grundſ.) unmöglich iſt. Es wird alſo die Grundlinie BC die EF decken, und ihr gleich ſeyn, folglich wird auch das ganze Dreyeck ABC das ganze Dreyeck DEF decken und ihm gleich ſeyn, und mithin werden auch die übrigen Winkel beyder einander decken, und ſtückweiſe gleich ſeyn, der ABC nämlich dem DEF, und der ACB dem DFE.

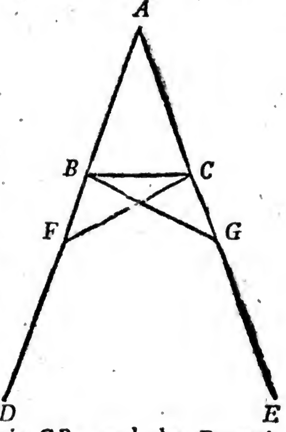
Wenn demnach in zwey Dreyecken u. ſ. w. wie zu erweiſen war.

5. *Saz.*

Lehrſaz. In gleichſchenkeligen Dreyecken ſind die Winkel an der Grundlinie, und, wenn man die gleichen Schenkel verlängert, auch die Winkel unter der Grundlinie einander gleich.

Es

Es ſey ABC ein gleichſchenkeliges Dreyeck, worin die Seite AB der AC gleich ſey, und man ſeze (2. Ford.) an die AB, AC die BD, CE in gerader Richtung, ſo behaupte ich, daſs der Winkel ABC dem Winkel ACB, und der Winkel CBD dem Winkel BCE gleich ſey.



Beweis. Man nehme in der Linie BD nach Belieben einen Punkt F an, ſchneide (3. Saz) von der gröſſern AE, ein der kleinern AF gleiches Stück AG ab, und ziehe die Linien CF, BG.

Weil nun die AF der AG und die AB der AC gleich iſt, ſo ſind die beyden AF, AC den beyden AG, AB ſtückweiſe gleich, auch ſchlieſſen ſie einen gemeinſchaftlichen Winkel FAG ein; folglich iſt (4. Saz) auch die Grundlinie FC der Grundlinie GB, und das Dreyeck AFC dem Dreyecke AGB gleich, mithin ſind auch die übrigen Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen, einander ſtückweiſe gleich, nämlich der Winkel ACF dem ABG, und der Winkel AFC dem AGB. Da ferner die ganze Linie AF der ganzen AG, und das Stück AB dem Stücke AC gleich iſt, ſo iſt auch (3. Grundſ.) der Reſt BF dem Reſte CG gleich. Es iſt aber auch gezeigt worden, daſs die CF der BG gleich ſey. Demnach ſind die beyden BF, FC den beyden CG, BG ſtückweiſe gleich, auch iſt der Winkel BFC dem Winkel CGB gleich, und beyde haben die BC zur gemeinſchaftlichen Grundlinie; folglich iſt (4. Saz) das ganze Dreyeck BFC dem ganzen Dreyecke CGB gleich, auch die übrigen Winkel, welche gleichen Seiten gegenüberliegen, ſind einander ſtückweiſe gleich. Demnach iſt der Winkel FBC dem Winkel GCB, und der Winkel BCF dem Winkel CBG gleich. Da nun gezeigt worden iſt, daſs der ganze Winkel ABG dem ganzen Winkel ACF, und das Stück CBG dem Stücke

BCF

BCF gleich ſey, ſo iſt (3. Grundſ.) auch der Reſt ABC dem Reſte ACB gleich, und dieſe ſind die Winkel an der Grundlinie des Dreyecks ABC. Es iſt aber auch gezeigt worden, daſs der Winkel FBC dem Winkel GCB gleich ſey, und dieſe ſind die Winkel unter der Grundlinie.

Demnach ſind in gleichſchenkeligen Dreyecken u. ſ. w. w. z. e. w.

6. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel einander gleich ſind, ſo ſind auch die Seiten, die den gleichen Winkeln gegenüber liegen, einander gleich.

Es ſey das Dreyeck ABC, in welchem der Winkel ABC dem Winkel ACB gleich ſey, ſo behaupte ich, daſs auch die Seite AC der Seite AB gleich ſey.

Beweis. Wenn die Seite AB der AC ungleich iſt, ſo muſs die eine von beyden gröſſer, als die andere, ſeyn. Es ſey alſo die gröſſere AB, und man ſchneide (3. Saz) von der gröſſern AB ein der kleinern AC gleiches Stück DB ab, und ziehe die DC.

A
D
B
C

Weil nun die DB der AC gleich, und BC gemeinſchaftlich iſt, ſo ſind die beyden DB, BC den beyden AC, CB ſtückweiſe gleich, auch iſt der Winkel DBC dem Winkel ACB gleich; folglich iſt (4. Saz.) auch die Grundlinie DC der Grundlinie AB, und das Dreyeck ABC dem Dreyecke DCB, das heiſst das gröſſere dem kleinern, gleich, welches ungereimt iſt. Es iſt alſo die AB der AC nicht ungleich, folglich gleich.

Wenn demnach u. ſ. w. w. z. e. w.

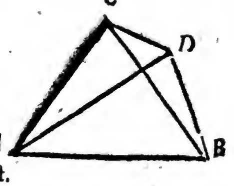
7. *Saz.*

Lehrſaz. Auf der nämlichen geraden Linie können nicht von verſchiedenen Punkten aus auf

auf einerley Seite zwey Paare einander stückweise gleicher gerader Linien so aufgestellt werden, daſs sie einerley Endpunkte hätten. Oder: Von den Endpunkten (A, B) einer geraden Linie (AB), von welchen aus man nach einerley Punkt (C) zwey gerade Linien (AC, BC) gezogen hat, können nicht nach einem andern Punkte (D) auf der nämlichen Seite dieser Linie zwey andere gerade Linien (AD, DB) gezogen werden, die den ersten beyden stückweise gleich wären.

Es seyen, die Möglichkeit angenommen, auf der nämlichen geraden Linie AB von zwey verschiedenen Punkten C, D aus, an einerley Seite CD zwey Paare einander stückweise gleicher gerader Linien AC, CB und AD, DB, so aufgestellt, daſs sie einerley Endpunkte A, B haben, die CA nämlich sey der DA gleich. und habe mit ihr einerley Endpunkt A, und die CB sey der DB gleich, und habe mit ihr einerley Endpunkt B, so ziehe man die CD.

Da nun die AC der AD gleich ist, so ist (5. Saz.) der Winkel ACD dem Winkel ADC gleich. Demnach ist der Winkel ADC gröſser, als der DCB, und folglich ist noch vielmehr der Winkel CDB gröſser, als der Winkel DCB. Da ferner die CB der DB gleich ist, so ist der Winkel CDB dem Winkel DCB gleich. Es ist aber gezeigt worden, daſs er auch viel gröſser sey, als dieser, welches unmöglich ist.



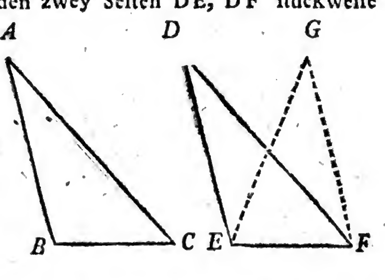
Demnach können u. s. w. w. z. e. w.

8. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn in zwey Dreyecken zwey und zwey Seiten einander stückweise gleich sind, und es ist auch die Grundlinie des einen der Grundlinie des andern gleich, so ist auch in bey-

beyden der Winkel, der von den gleichen Seiten eingeſchloſſen wird, gleich.

Es ſeyen zwey Dreyecke ABC, DEF, in welchen die zwey Seiten AB, AC den zwey Seiten DE, DF ſtückweiſe gleich ſeyen, die AB nämlich der DE; und die AC der DF, auch ſey die Grundlinie BC der Grundlinie EF gleich, ſo behaupte ich, daſs auch der Winkel BAC dem Winkel EDF gleich ſey.



Beweis. Wenn man das Dreyeck ABC über das Dreyeck DEF ſo legt, daſs der Punkt B auf den Punkt E, und die Linie BC auf die EF zu liegen kommt, ſo wird euch der Punkt C auf den Punkt F fallen, weil die BC der EF gleich iſt. Wenn aber ſolchergeſtalt die BC die EF deckt, ſo werden auch die BA, AC die ED, DF decken. Denn wenn zwar die Grundlinie AC die Grundlinie EF deckte, aber die Seiten BA, AC die Seiten ED, DF nicht deckten, ſondern von ihnen abwichen, wie die EG, GF, ſo könnten auf der nämlichen geraden Linie von verſchiedenen Punkten aus auf einerley Seite derſelben zwey Paare einander ſtückweiſe gleicher gerader Linien ſo aufgeſtellt werden, daſs ſie einerley Endpunkte hätten. Dies iſt aber (7. Saz.) unmöglich. Folglich iſt es auch unmöglich, daſs, wenn die Grundlinie BC die EF deckt, die Seiten BA, AC die Seiten DE, DF nicht decken ſollten. Sie müſſen ſie alſo decken, und folglich muſs auch der Winkel BAC den Winkel EDF decken, und ihm gleich ſeyn.

Wenn demnach in zwey Dreyecken u. ſ. w. w. z. e. w.

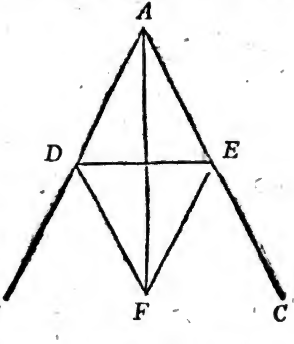
9. Saz.

Aufgabe. Einen gegebenen geradlinigen Winkel zu halbiren.

Es

Es sey der gegebene geradlinige Winkel BAC, und man soll diesen halbiren.

Auflösung. Man nehme auf der Linie AB nach Belieben einen Punkt D an, schneide (3. Saz.) von der Linie AC ein der AD gleiches Stück AE ab, und ziehe die DE. Hierauf beschreibe man (1. Saz.) auf der DE ein gleichseitiges Dreyeck DEF, und ziehe die AF, so behaupte ich, daſs der Winkel BAC von der Linie AF halbirt werde.



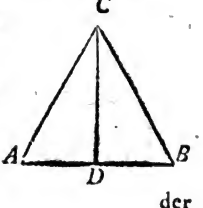
Beweis. Weil die Linie AD der AE gleich, und die AF gemeinschaftlich ist, so sind die beyden DA, AF den beyden EA, AF stückweise gleich, auch ist die Grundlinie DF der Grundlinie EF gleich; folglich ist auch (8. Saz.) der Winkel DAF dem Winkel EAF gleich. Und mithin wird der gegebene geradlinige Winkel BAC von der Linie AF halbirt; w. z. v. w.

10. *Saz.*

Aufgabe. Eine gegebene begränzte gerade Linie zu halbiren.

Es sey die gegebene begränzte gerade Linie AB, und man soll diese halbiren.

Auflösung. Man errichte (1. Saz) auf derselben ein gleichseitiges Dreyeck ABC, und halbire (9. Saz.) den Winkel ACB durch die Linie CD, so behaupte ich, daſs die gerade Linie AB in dem Punkte D halbirt werde.



Beweis. Weil die Linie AC der CB gleich, und die CD gemeinschaftlich ist, so sind die beyden AC, CD den beyden BC, CD stückweise gleich, auch ist der Winkel ACD dem Winkel BCD gleich; folglich ist auch (4. Saz) die Grundlinie AD

der

der Grundlinie BD gleich. Und mithin ist die gegebene begränzte gerade Linie AB in dem Punkte D halbirt. w. z. v. w.

11. *Saz.*

Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie, in einem auf ihr gegebenen Punkte, ein Loth aufzurichten.

Es sey die gerade Linie AB, und in derselben der Punkt C gegeben, und man soll in dem Punkte C ein Loth auf der AB aufrichten.

Auflösung. Man nehme in der Linie AC nach Belieben einen Punkt D an, und mache (3. Saz) die CE der CD gleich. Hierauf errichte man auf der DE (1. Saz) ein gleichseitiges Dreyeck FDE, und ziehe die FC, so behaupte ich, dass die FC in dem gegebenen Punkte C auf der gegebenen geraden Linie AB lothrecht errichtet sey.

Beweis. Weil die Linie CD der CE gleich, und die FC gemeinschaftlich ist; so sind die beyden DC, CF den beyden EC, FC stückweise gleich, auch ist die Grundlinie DF der Grundlinie EF gleich; folglich ist (8. Saz) auch der Winkel DCF dem Winkel ECF gleich, und diese Winkel sind Nebenwinkel. Wenn aber eine gerade Linie auf einer andern so aufgestellt ist, dass sie mit ihr gleiche Nebenwinkel macht, so ist (10. Erkl.) jeder der gleichen Winkel ein rechter. Folglich ist jeder der beyden Winkel DCF, FCE ein rechter. Demnach ist auf der gegebenen geraden Linie AB, in dem auf ihr gegebenen Punkte C, die FC lothrecht errichtet worden, w. z. v. w.

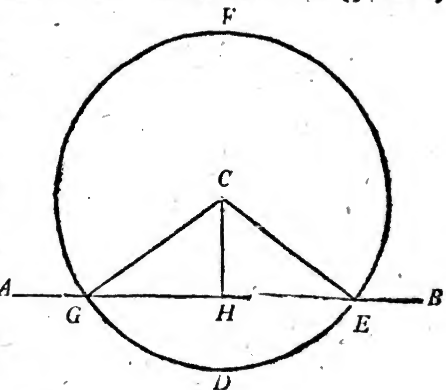
12. *Saz.*

12. *Saz.*

Aufgabe. Auf eine gegebene unbegränzte gerade Linie von einem auſſer ihr gegebenen Punkte ein Loth zu fällen.

Es ſey die gegebene unbegränzte gerade Linie A B, und der gegebene, auſſer ihr befindliche, Punkt C, und man ſoll auf die gegebene unbegränzte gerade Linie A B, von dem auſſer ihr gegebenen Punkte C, ein Loth fällen.

Auflöſung. Man nehme auf der andern Seite der Linie A B nach Belieben einen Punkt D an, und beſchreibe aus dem Mittelpunkte C, und mit der Weite C D, (3. Ford.) einen Kreis EFG. Hierauf halbire man (10. Saz.) die Linie E G in dem Punkte H, und ziehe die Linien C G, C H, C E, ſo behaupte ich, daſs auf die gegebene unbegränzte gerade Linie A B von dem auſſer ihr gegebenen Punkte C das Loth C H gefällt worden ſey.



Beweis. Weil die Linie G H der H E gleich, die H C aber gemeinſchaftlich iſt, ſo ſind die beyden G H, H C den beyden E H, H C ſtückweiſe gleich; auch iſt (15. Erkl.) die Grundlinie C G der Grundlinie C E gleich; folglich iſt (8. Saz.) auch der Winkel C H G dem Winkel E H C gleich, und dieſe Winkel ſind Nebenwinkel. Wenn aber eine gerade Linie auf einer andern ſo aufgeſtellt iſt, daſs ſie mit ihr gleiche Nebenwinkel macht, ſo iſt jeder der gleichen Winkel ein rechter, und die ſolchergeſtalt aufgeſtellte Linie heiſst auf der andern lothrecht. Demnach iſt, auf die gegebene unbegränzte gerade Linie A B von dem auſſer derſelben

ſelben gegebenen Punkte C das Loth CH gefällt worden, w. z. v. w.

13. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn eine gerade Linie auf einer andern ſo aufgeſtellt iſt, daſs ſie mit ihr Winkel macht, ſo ſind dieſe Winkel entweder ſelbſt zwey rechte, oder zwey rechten gleich.

Es ſey die gerade Linie AB auf der CD ſo aufgeſtellt, daſs ſie mit ihr die Winkel CBA, ABD mache, ſo behaupte ich, daſs dieſe Winkel entweder ſelbſt zwey rechte, oder zwey rechten gleich ſeyen.

Beweis. Denn wenn der Winkel CBA dem Winkel ABD gleich iſt, ſo ſind (10. Erkl.) beyde rechte. Iſt aber dies nicht, ſo errichte man (11. Saz.) in dem Punkte B auf die Linie DC die EB lothrecht, ſo ſind die Winkel CBE, EBD zwey rechte. Da nun der Winkel CBE den beyden CBA, ABE gleich iſt, ſo ſind, wenn man auf beyden Seiten den Winkel EBD hinzuſezt, die Winkel CBE, EBD den drey Winkeln CBA, ABE, EBD gleich.

Da ferner der Winkel DBA den beyden DBE, EBA gleich iſt, ſo ſind, wenn man auf beyden Seiten den Winkel ABC hinzuſezt, die Winkel DBA, ABC den drey Winkeln DBE, EBA, ABC gleich. Es iſt aber gezeigt worden, daſs auch die Winkel CBE, EBD den nämlichen dreyen gleich ſeyen. Dinge aber, die *einem* dritten gleich ſind, ſind einander ſelbſt gleich. Folglich ſind die Winkel CBE, EBD den Winkeln DBA, ABC gleich. Aber die Winkel CBE, EBD ſind zwey rechte; folglich ſind auch die Winkel DBA, ABC zwey rechten gleich.

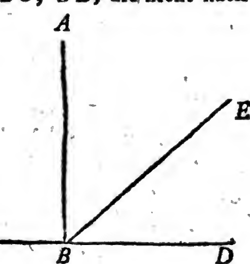
Wenn demnach u. ſ. w. w. z. e. w.

14. *Saz.*

14. *Saz.*

Lehrfaz. Wenn mit einer geraden Linie in einem Punkte derfelben zwey andere gerade Linien, die nicht nach einerley Seite zu liegen, Nebenwinkel machen, die zwey rechten gleich find; fo liegen die beyden geraden Linien in *einer* geraden Linie an einander.

Mit der geraden Linie AB in dem Punkte B derfelben machen die beyden geraden Linien BC, BD, die nicht nach einerley Seite zu liegen, die Nebenwinkel ABC, ABD zwey rechten gleich, fo behaupte ich, dafs die gerade Linie BD mit der CB in *einer* geraden Linie liege.



Beweis. Denn wenn nicht die BD mit der BC in *einer* geraden Linie liegt, fo liege (2. Ford.) die BE mit der BC in gerader Linie. Weil nun die gerade Linie AB auf der CBE aufgeftellt ift, fo find (13. Saz) die Winkel ABC, ABE zwey rechten gleich. Nach der Vorausfezung aber find die Winkel ABC, ABD zwey rechten gleich; folglich find die Winkel CBA, ABE den Winkeln CBA, ABD gleich. Man nehme auf beyden Seiten den Winkel ABC weg, fo ift der Reft ABE dem Refte ABD, das heifst, der kleinere dem gröffern, gleich, welches unmöglich ift. Folglich liegt die gerade Linie BE nicht mit der BC in *einer* geraden Linie. Auf eben diefe Art kann dies aber von jeder andern geraden Linie, auffer der BD, gezeigt werden; Folglich liegt die BD mit der CB in gerader Linie.

Wenn demnach u. f. w. w. e. z. w.

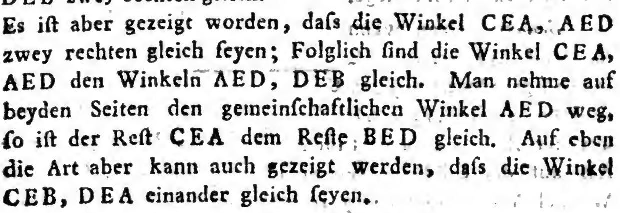
15. *Saz.*

Lehrfaz. Wenn zwey gerade Linien einander fchneiden, fo machen fie die Scheitelwinkel einander gleich.

 Die

Die beyden geraden Linien AB, CD schneiden einander in dem Punkt E, so behaupte ich, daſs der Winkel AEC dem Winkel DEB, und der Winkel CEB dem Winkel AED gleich sey.

Beweis. Weil die gerade Linie AE auf der CD aufgestellt ist, und mit ihr die Winkel CEA, AED macht, so sind (13. Saz.) die Winkel CEA, AED zwey rechten gleich. Weil ferner die gerade Linie DE auf der AB aufgestellt ist und mit ihr die Winkel AED, DEB macht, so sind (13. Saz) die Winkel AED, DEB zwey rechten gleich.



Es ist aber gezeigt worden, daſs die Winkel CEA, AED zwey rechten gleich seyen; Folglich sind die Winkel CEA, AED den Winkeln AED, DEB gleich. Man nehme auf beyden Seiten den gemeinschaftlichen Winkel AED weg, so ist der Rest CEA dem Reste BED gleich. Auf eben die Art aber kann auch gezeigt werden, daſs die Winkel CEB, DEA einander gleich seyen.

Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w.

Zusaz. Hieraus erhellet, daſs, wenn gerade Linien, so viel ihrer seyn mögen, einander schneiden, die Winkel an dem Durchschnittspunkte vier rechten gleich seyen.

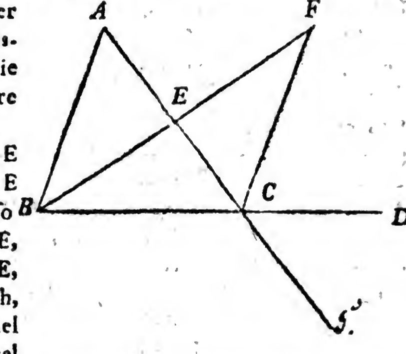
16. *Saz.*

Lehrsaz. An jedem Dreyecke ist, wenn man eine seiner Seiten verlängert, der äussere Winkel gröſser, als jeder seiner innern Gegenwinkel.

Es sey das Dreyeck ABC, und man verlängere eine seiner Seiten, die BC, bis nach D, so behaupte ich, daſs der äussere Winkel ACD gröſser sey, als jeder seiner innern Gegenwinkel CBA, BAC.

Beweis.

Beweis. Man halbire (10. Saz.) die AC in dem Punkte E, ziehe hierauf die BE, und verlängere ſie bis nach F, ſo daſs die EF der EB gleich wird, alsdann ziehe man die FC, und verlängere die AC bis nach G.



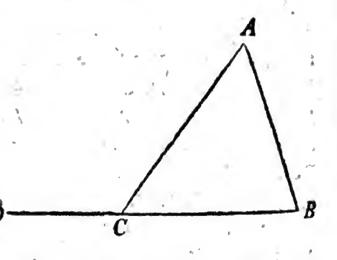
Da nun die AE der EC, und die BE der EF gleich iſt, ſo ſind die beyden AE, EB den beyden CE, EF ſtückweiſe gleich, auch iſt der Winkel AEB dem Winkel FEC (15. Saz.) gleich, denn ſie ſind Scheitelwinkel; folglich iſt (4. Saz.) auch die Grundlinie AB der Grundlinie FC, und das ganze Dreyeck ABE dem ganzen Dreyecke FEC gleich, auch ſind in den beyden die übrigen Winkel, welche gleichen Seiten gegenüber, einander ſtückweiſe gleich; Folglich iſt der Winkel BAE dem Winkel ECF gleich. Aber (9. Grundſ.) iſt der Winkel ECD gröſſer, als der Winkel ECF; folglich iſt auch der Winkel ACD gröſſer, als der Winkel BAE. Auf eben die Art kann nun, wenn man die Linie BC halbirt, gezeigt werden, daſs auch der Winkel BCG, das iſt (15. Saz.) der Winkel ACD, gröſſer ſey, als der Winkel ABC.

Demnach iſt an jedem Dreyecke u. ſ. w. w. z. e. w.

17. *Saz.*

Lehrſaz. In jedem Dreyecke ſind jede zwey Winkel zuſammen kleiner, als zwey rechte.

Es ſey das Dreyeck ABC, ſo behaupte ich, daſs jede zwey Winkel des Dreyecks ABC zuſammen kleiner ſeyen, als zwey rechte.

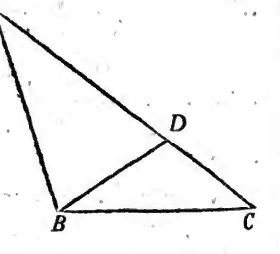


Beweis. Man verlängere (2. Ford.) die Seite BC nach D. Da nun ACD ein äuſſerer Winkel des Dreyecks ABC iſt, ſo iſt er (16. Saz.) gröſſer, als ſein innerer Gegenwinkel ABC. Man ſeze zu beyden den Winkel ACB hinzu, ſo ſind die Winkel ACD, ACB gröſſer, als die Winkel ABC, BCA. Aber die Winkel ACD, ACB ſind (13. Saz.) zwey rechten gleich; folglich ſind die Winkel ABC, BCA kleiner, als zwey rechte. Eben ſo kann auch gezeigt werden, daſs die Winkel BAC, ACB, wie auch die Winkel CAB, ABC kleiner, als zwey rechte, ſeyen.

Demnach ſind in jedem Dreyecke u. ſ. w. w. z. e. w.

18. *Saz.*

Lehrſaz. In jedem Dreyecke liegt der gröſſeren Seite der gröſſere Winkel gegenüber.



Es ſey das Dreyeck ABC, in welchem die Seite AC gröſſer, als die Seite AB ſey, ſo behaupte ich, daſs auch der Winkel ABC gröſſer ſey, als der Winkel BCA.

Beweis. Da die Seite AC gröſſer iſt als die AB, ſo mache man (3. Saz.) die AD der AB gleich und ziehe die BD. Da nun der Winkel ADB ein äuſſerer Winkel des Dreyecks BDC iſt, ſo iſt er (16. Saz.) gröſſer, als ſein innerer Gegenwinkel DCB. Aber (5. Saz.) iſt der Winkel ADB dem Winkel ABD gleich, weil die Seite AB der AD gleich iſt, folglich iſt auch der Winkel ABD gröſſer, als der Winkel ACB, und mithin iſt noch vielmehr der Winkel ABC gröſſer, als der Winkel ACB.

Demnach liegt in jedem Dreyecke u. ſ. w. w. z. e. w.

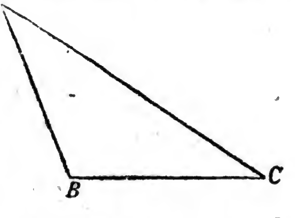
14. *Saz.*

19. *Saz.*

Lehrsaz. In jedem Dreyecke liegt dem grössern Winkel die grössere Seite gegenüber.

Es sey das Dreyeck ABC, in welchem der Winkel ABC grösser, als der Winkel BCA, sey, so behaupte ich, dass auch die Seite AC grösser sey, als die Seite AB.

Beweis. Denn wäre nicht die Seite AC grösser, als die AB, so wäre sie entweder der AB gleich, oder kleiner, als die AB. Aber gleich kann die AC der AB nicht seyn, denn sonst wäre (5. Saz.) auch der Winkel ACB dem Winkel ABC gleich. Dies ist er aber nicht; folglich ist auch die Seite AC der AB nicht gleich. Eben so wenig aber ist die Seite AC kleiner, als die AB; denn sonst wäre (18. Saz.) auch der Winkel ABC kleiner, als der Winkel ACB. Dies ist er aber nicht; folglich ist auch die Seite AC nicht kleiner als die AB. Es ist aber gezeigt worden, dass sie ihr auch nicht gleich sey; folglich ist die Seite AC grösser, als die AB.



Demnach liegt in jedem Dreyecke u. s. w. w. z. e. w.

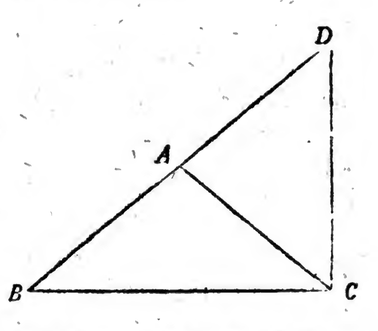
20. *Saz.*

Lehrsaz. In jedem Dreyecke sind jede zwey Seiten zusammen grösser, als die dritte

Es sey das Dreyeck ABC, so behaupte ich, dass in dem Dreyecke ABC jede zwey Seiten zusammen grösser seyen, als die dritte, nämlich die BA, AC grösser als BC, die AB, BC grösser als AC, und die BC, CA grösser als AB.

Beweis. Man verlängere die Seite BA nach D, mache (3. Saz.) die DA der CA gleich, und ziehe die DC. Da nun die DA der AC gleich ist, so ist (5. Saz.) auch der Winkel ADC dem Winkel ACD gleich. Es ist aber (9. Grunds.) der Winkel BCD grösser, als der Winkel ACD, folglich ist auch der Winkel BCD grösser, als der Win-

Winkel ADC. Weil nun in dem Dreyecke DCB der Winkel BCD gröſſer iſt, als der Winkel BDC, und (19. Saz.) dem gröſſern Winkel auch die gröſſere Seite gegenüberliegt, ſo iſt die Seite DB gröſſer, als die BC. Es iſt aber die Seite BD den Seiten



AB, AC gleich; folglich ſind die Seiten BA, AC zuſammen gröſſer, als die BC. Auf eben dieſe Art aber kann auch gezeigt werden, daſs die Seiten AB, BC zuſammen gröſſer, als die CA, und die BC, CA zuſammen gröſſer, als die AB ſeyen.

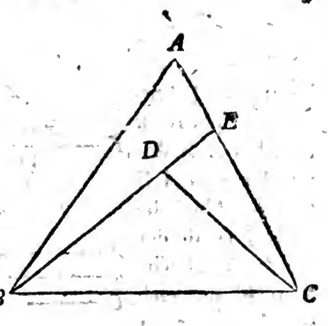
Demnach ſind u. ſ. w. w. z. e. w.

21. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn in den Endpunkten einer von den Seiten eines Dreyecks innerhalb deſſelben zwey gerade Linien aufgeſtellt werden, ſo ſind dieſe zwar kleiner, als die zwey übrigen Seiten des Dreyecks, ſchlieſſen aber einen gröſſern Winkel ein.

Es ſeyen in den Endpunkten B, C einer von den Seiten BC des Dreyecks ABC innerhalb deſſelben die zwey gerade Linien BD, DC aufgeſtellt, ſo behaupte ich, daſs die Linien BD, DC zwar kleiner ſeyen, als die zwey übrigen Seiten BA, AC des Dreyecks, aber einen Winkel BDC einſchlieſſen, der gröſſer ſey, als der Winkel BAC.

Beweis. Man verlängere die Linie BD nach E. Da nun (20. Saz.) in jedem Dreyecke jede zwey Seiten zuſammen gröſſer ſind, als die dritte, ſo ſind die zwey Seiten AB, AE des Dreyecks ABE gröſſer, als die dritte BE. Sezt man alſo beyderſeits die Linie EC hinzu, ſo ſind die Seiten BA, AC gröſſer, als die Linien BE, EC. Da ferner in dem Dreyecke CED die zwey Seiten CE, ED gröſſer ſind, als die Seite CD, ſo ſind, wenn man beyderſeits die DB hinzuſezt, die Linien CE, EB gröſſer, als die CD, DB. Aber von den Sei-



ten BA, AC ist gezeigt worden, dass sie grösser seyen, als die Linien BE, EC; folglich sind noch vielmehr die BA, AC grösser, als die BD DC. Da ferner (16. Saz.) an jedem Dreyecke der äussere Winkel grösser ist, als sein innerer Gegenwinkel, so ist der Winkel BDC an dem Dreyecke CDE, als äusserer Winkel, grösser, als der Winkel CED. Aus eben dem Grunde aber ist der Winkel CEB, als äusserer Winkel an dem Dreyecke ABE, grösser, als der Winkel BAC. Es ist aber gezeigt worden, dass der Winkel BDC grösser sey, als der Winkel CEB; folglich ist der Winkel BDC noch vielmehr grösser, als der Winkel BAC.

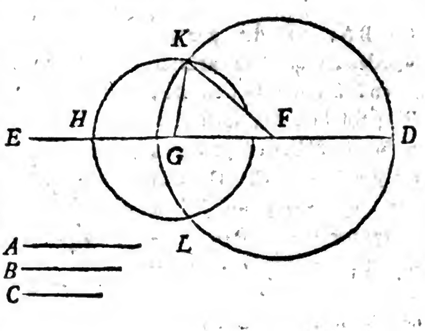
Wenn demnach in den Endpunkten u. s. w. w. z. e. w.

22. *Saz.*

Aufgabe. Aus drey geraden Linien, welche drey andern gegebenen, von denen jede zwey zusammen grösser, als dritte, sind, stückweise gleich seyen, ein Dreyeck zu errichten.

Es seyen die drey gegebenen geraden Linien A, B, C, von denen jede zwey zusammen grösser, als die dritte, seyen, nämlich die A und B zusammen grösser, als C, die A und C zusammen grösser, als B, und die B und C zusammen gösser, als A: man soll aus drey geraden Linien, welche den dreyen A, B, C gleich seyen, ein Dreyeck errichten.

Auflösung. Man ziehe die an D begränzte, nach E zu aber unbegränzte gerade Linie DE, und mache (3. Saz.) die DF der A, die FG der B, die GH der C gleich. Hierauf beschreibe man aus dem Mittelpunkte F, mit der Weite FD. (3. Ford.) den Kreis DKL und aus dem Mittelpunkte G, mit der Weite GH, den Kreis KLH, und ziehe die Linien KF, KG, so behaupte ich dass das Dreyeck KFG aus drey Linien errichtet sey, welche den gegebenen A, B, C gleich seyen. Be-



Beweis. Weil der Punkt F des Kreises DKL Mittelpunkt ist, so ist (15. Erkl.) die Linie FD der FK gleich. Aber die Linie FD ist der Linie A gleich; folglich ist auch die KF der A gleich. Da ferner der Punkt G des Kreises LKH Mittelpunkt ist, so ist die Linie GH der GK gleich. Aber die Linie GH ist der C gleich; folglich ist auch die KG der C gleich. Ausserdem ist die FG der B gleich; folglich sind die drey Linien KF, FG, GK den drey gegebenen A, B, C gleich.

Demnach ist aus den drey Linien KF, FG, GK, welche den drey gegebenen A, B, C gleich sind, das Dreyeck KFG errichtet worden, w. z. v. w.

23. *Saz.*

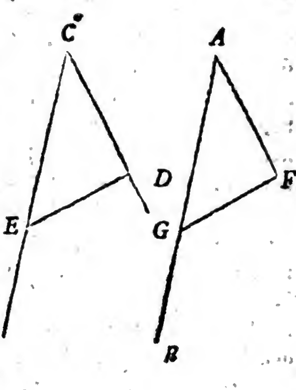
Aufgabe. An eine gegebene gerade Linie und einen in ihr gegebenen Punkt einen geradlinigen Winkel zu sezen, der einem gegebenen geradlinigen Winkel gleich sey.

Es sey die gegebene gerade Linie AB, und der in ihr gegebene Punkt A, der gegebene geradlinige Winkel DCE; und man soll an die gegebene gerade Linie AB und den in ihr gegebenen Punkt A einen geradlinigen Winkel sezen, der dem gegebenen geradlinigen Winkel DCE gleich sey.

Auflösung. Man nehme auf den beyden CD, CE nach Belieben die Punkte D, E an, und ziehe die DE. Hierauf errichte man (22. Saz.) aus drey Linien, welche den dreyen CD, CE, DE gleich seyen, das Dreyeck AFG so, dass die CD der AF, die CE der AG, und die DE der FG gleich sey.

Be-

Beweis. Da die beyden DC, CE den beyden FA, AG stückweise gleich sind, auch die Grundlinie DE der Grundlinie FG gleich ist, so ist (8. Saz.) auch der Winkel DCE dem Winkel FAG gleich.



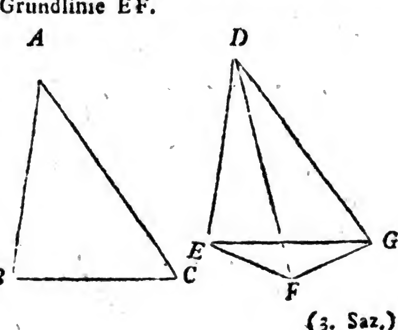
Demnach ist an die gegebene gerade Linie AB, und den in ihr gegebenen Punkt A, ein geradliniger Winkel FAG gesezt worden, der dem gegebenen geradlinigen Winkel DCE gleich ist. w. z. v. w.

24. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn in zwey Dreyecken zwey und zwey Seiten einander stückweise gleich sind, aber der von den gleichen Seiten eingeschlossene Winkel in dem einen grösser ist, als in dem andern, so ist auch die Grundlinie des einen grösser, als die Grundlinie des andern.

Es seyen die zwey Dreyecke ABC, DEF in welchen die zwey Seiten AB, AC den zwey Seiten DE, DF stückweise gleich seyen, die Seite AB, nämlich der DE und die AC der DF, aber der Winkel BAC sey grösser, als der Winkel EDF, so behaupte ich, dass die Grundlinie BC grösser sey, als die Grundlinie EF.

Beweis. Weil der Winkel BAC grösser ist, als der Winkel EDF, so seze man (23. Saz.) an den Punkt D der Linie DE einen Winkel EDG, der dem Winkel BAC gleich sey, mache



(3. Saz.)

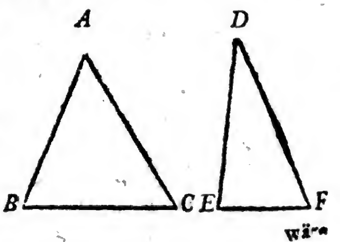
(3. Saz.) die DG der AC oder DF gleich, und ziehe alsdann die GE und FG. Da nun die AB der DE, und die AC der DG gleich ist, so sind die beyden BA, AC den beyden ED, DG stückweise gleich; nun ist auch der Winkel BAC dem Winkel EDG gleich; folglich ist (4. Saz.) auch die Grundlinie BC der Grundlinie EG gleich. Da ferner die DG der DF, und (5. Saz.) der Winkel DFG dem Winkel DGF gleich ist, so ist der Winkel DFG grösser, als der Winkel EGF, und folglich ist noch vielmehr der Winkel EFG grösser, als der Winkel EGF. Da nun in dem Dreyecke EFG der Winkel EFG grösser ist, als der Winkel EGF, aber (19. Saz.) dem grössern Winkel die grössere Seite gegenüber liegt, so ist die Seite EG grösser, als die Seite EF. Aber die Seite EG ist der BC gleich; folglich ist die Seite BC grösser, als die EF.

Wenn demnach in zwey Dreyecken u. s. w. w. z. e. w.

25. Saz.

Lehrsaz. Wenn in zwey Drezecken zwey und zwey Seiten einander stückweise gleich sind, aber die Grundlinie des einen grösser ist, als die Grundlinie des andern, so ist auch der von den gleichen Seiten eingeschlossene Winkel in dem einen grösser, als in dem andern.

Es seyen zwey Dreyecke ABC, DEF, in welchen die zwey Seiten AB, AC den zwey Seiten DE, DF stückweise gleich seyen, die AB nämlich der DE, und die AC der DF, die Grundlinie BC aber sey grösser, als die Grundlinie EF, so behaupte ich, dass auch der Winkel BAC grösser sey, als der Winkel EDF.



Beweis. Wäre der Winkel BAC nicht grösser, als der EDF, so wäre er entweder ihm gleich, oder er wäre kleiner. Aber gleich ist der Winkel BAC dem EDF nicht, denn sonst wäre

wäre (4. Saz.) die Grundlinie BC der EF gleich. Dies ist sie aber nicht; folglich ist auch der Winkel BAC dem EDF nicht gleich. Eben so wenig aber ist der Winkel BAC kleiner, als der EDF, denn sonst wäre (24. Saz.) die Grundlinie BC kleiner, als die EF. Dies ist sie aber nicht; folglich ist auch der Winkel BAC nicht kleiner, als der EDF. Es ist aber gezeigt worden, dass er ihm auch nicht gleich sey; folglich ist der Winkel BAC grösser, als der EDF.

Wenn demnach in zwey Dreyecken u. s. w. w. z. e. w.

26. *Saz.*

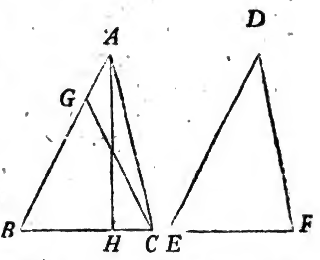
Lehrsaz. Wenn in zwey Dreyecken zwey und zwey Winkel einander stückweise gleich sind, und es ist auch eine Seite des einen einer Seite des andern gleich, sie mag nun an den gleichen Winkeln oder einem derselben gegenüber liegen, so sind auch die übrigen Seiten in beyden Dreyecken einander stückweise gleich, und der dritte Winkel des einen ist dem dritten Winkel des andern gleich.

Es seyen zwey Dreyecke ABC, DEF, in welchen die zwey Winkel ABC, BCA den zwey Winkeln DEF, EFD stückweise gleich seyen, der ABC nämlich dem DEF, und der BCA dem EFD, auch sey eine Seite des einen einer Seite des andern gleich, und zwar *erstlich* diejenige, welche an den gleichen Winkeln liegt, nämlich die Seite BC sey der EF gleich, so behaupte ich, dass auch die übrigen Seiten in beyden einander stückweise gleich seyen, die AB nämlich der DE, und die AC der DF, wie auch, dass der übrige Winkel BAC dem EDF gleich sey.

Beweis. Wäre die Seite AB der DE ungleich, so müsste die eine von beyden grösser, als die andere, seyn. Es sey AB die grössere; man mache (3. Saz.) die GB, der DE gleich, und ziehe die GC.

Da nun die Seite BG der DE, und die Seite BC der EF gleich ist, so sind die beyden BG, BC den beyden DE, EF stückweise gleich, auch ist der Winkel GBC dem Winkel

DEF



DEF gleich; folglich ist (4. Saz.) auch die Grundlinie GC der Grundlinie DF, und das ganze Dreyeck GBC dem ganzen Dreyecke DEF gleich, auch sind in beyden die übrigen Winkel, welche gleichen Seiten gegenüber liegen einander stückweise gleich. Es ist also der Winkel GCB dem Winkel DFE gleich. Es ist aber angenommen, der Winkel DFE sey dem Winkel BCA gleich; folglich ist auch der Winkel BCG dem Winkel BCA, das heisst, der kleinere dem grössern, gleich, welches unmöglich ist. Demnach ist die Seite AB der DE nicht ungleich, also gleich. Die Seite BC aber ist der EF gleich, mithin sind die zwey Seiten AB, BC den zwey Seiten DE, EF stückweise gleich, auch ist der Winkel ABC dem Winkel DEF gleich; folglich ist (4. Saz.) auch die Grundlinie AC der Grundlinie DF, und der übrige Winkel BAC dem übrigen Winkel EDF gleich.

Es seyen nun *zweytens* in beyden Dreyecken die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüber liegen, einander gleich, die AB nämlich der DE: so behaupte ich, dass auch in diesem Falle die übrigen Seiten beyder einander stückweise gleich seyn werden, die AC nämlich der DF, und die BC der EF, wie auch, dass der dritte Winkel BAC des einen dem dritten Winkel EDF des andern gleich seyn werde.

Denn wäre die BC der EF ungleich, so müsste eine von beyden grösser, als die andere, seyn. Es sey also, die Möglichkeit angenommen, die BC die grössere, so mache man (3. Saz.) der EF die BH gleich, und ziehe die AH.

Da nun die BH der EF, und die AB der DE gleich ist, so sind die zwey Seiten AB, BH den zwey Seiten DE, EF stückweise gleich, auch schliessen sie gleiche Winkel ein; folglich ist (4. Saz.) auch die Grundlinie AH der Grundlinie DF, und das ganze Dreyeck ABH dem ganzen Dreyecke DEF gleich, auch sind in beyden die übrigen Winkel, welche gleichen Seiten gegenüberliegen, einander stückweise gleich;

folg-

folglich ist der Winkel BHA dem Winkel EFD gleich. Der Winkel EFD aber ist dem Winkel BCA gleich; folglich ist auch der Winkel BHA dem Winkel BCA, das heisst, der äussere Winkel des Dreyecks AHC seinem innern Gegenwinkel, gleich, welches (16. Saz) unmöglich ist. Die BC ist also der EF nicht ungleich, folglich gleich. Es ist aber auch die AB der DE gleich; Demnach sind die zwey Seiten AB, BC den zwey Seiten DE, EF stückweise gleich; auch schliessen sie gleiche Winkel ein; folglich ist (4. Saz.) auch die Grundlinie AC der Grundlinie DE, und das ganze Dreyeck ABC dem ganzen Dreyecke DEF, wie auch der übrige Winkel BAC dem übrigen Winkel EDF gleich.

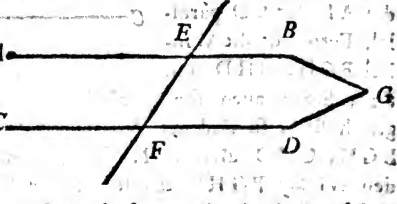
Wenn demnach in zwey Dreyecken u. s. w. w. z. e. w.

27. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, dass sie die Wechselwinkel einander gleich macht, so sind die beyden geraden Linien einander parallel.

Die zwey gerade Linien AB, CD werden von der dritten EF so geschnitten, dass sie die Wechselwinkel AEF, EFD einander gleich mache; so behaupte ich, dass die Linie AB der CD parallel sey.

Beweis. Denn wäre sie ihr nicht parallel, so müssten die zwey Linien AB, CD verlängert entweder an der Seite BD oder an der Seite AC zusammentreffen. Man verlängere sie also, und sie treffen an der Seite BD in dem Punkte G zusammen. Nun ist (16. Saz.) der äussere Winkel AEF des Dreyecks EGF grösser, als sein innerer Gegenwinkel EFG, aber



nach der Voraussezung ist er diesem auch gleich, welches unmöglich ist; folglich treffen die Linien AB, CD verlängert an der Seite BD nicht zusammen. Eben so kann aber gezeigt werden, dass sie auch an der Seite AC nicht zusammen tref-

treffen. Gerade Linien aber, die an keiner von beyden Seiten zusammen treffen, sind (35. Erkl.) parallel; folglich ist die AB der CD parallel.

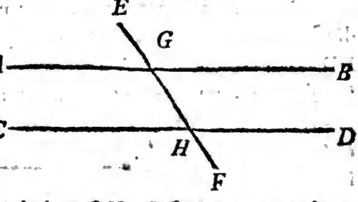
Wenn demnach zwey gerade Linien u. s. w. w. z. e. w.

28. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, dass der äussere Winkel seinem innern an einerley Seite liegenden Gegenwinkel gleich ist, oder die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel zwey rechten gleich sind, so sind die beyden geraden Linien einander parallel.

Die zwey gerade Linien AB, CD werden von der dritten EF so geschnitten, dass der äussere Winkel EGB seinem innern an einerley Seite liegenden Gegenwinkel GHD gleich sey, oder die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel BGH, GHD zwey rechten gleich seyen; so behaupte ich, dass die Linie AB der CD parallel sey.

Beweis. Weil der Winkel EGB dem GHD, aber (15. Saz.) der Winkel EGB dem AGH gleich ist, so ist auch der Winkel AGH dem GHD gleich, und diese sind Wechselwinkel; folglich ist (27. Saz.) die AB der CD parallel. Ferner da die Winkel BGH, GHD und (13. Saz.) auch die Winkel AGH, BGH zwey rechten gleich sind, so sind die Winkel AGH, BGH den Winkeln BGH, GHD gleich. Nimmt man also auf beyden Seiten den Winkel BGH weg, so ist der Rest AGH dem Reste GHD gleich, und diese sind Wechselwinkel: folglich ist wiederum (27. Saz.) die AB der CD parallel.



Wenn demnach zwey gerade Linien u. s. w. w. z. e. w.

29. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey parallele Linien von einer dritten geschnitten werden, so macht diese die Wechselwinkel einander gleich, den äussern Winkel seinem innern an einerley Seite liegenden Gegenwinkel gleich, und die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel zwey rechten gleich.

Die zwey parallele Linien AB, CD werden von der dritten EF geschnitten, so behaupte ich, dass diese die Wechselwinkel AGH, GHD einander gleich, den äussern Winkel EGB seinem innern, an einerley Seite liegenden, Gegenwinkel GHD gleich, und die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel BGH, GHD zwey rechten gleich mache.

Beweis. Wäre der Winkel AGH dem GHD ungleich, so müsste einer von beyden grösser, als der andere, seyn. Es sey nun AGH der grössere. Da also AGH grösser ist, als GHD, so seze man zu beyden den Winkel BGH hinzu, und es sind die Winkel AGH, BGH grösser, als die Winkel BGH, GHD. Aber (13. Saz.) sind die Winkel AGH, BGH zwey rechten gleich; folglich sind die Winkel BGH, GHD kleiner, als zwey rechte. Gerade Linien aber, die von einer dritten so geschnitten werden, dass die beyden innern an einerley Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel kleiner, als zwey rechte, sind, treffen, so weit, als nöthig ist, verlängert, an eben der Seite zusammen (11. Grunds.) Die geraden Linien AB, CD aber treffen nicht zusammen, weil sie, nach der Voraussezung, parallel sind; demnach ist auch der Winkel AGH dem GHD nicht ungleich, folglich gleich.

Der Winkel AGH aber ist (15. Saz.) dem Winkel EGB gleich; folglich ist auch der Winkel EGB dem GHD gleich;

Man

Man feze auf beyden Seiten den Winkel BGH hinzu, so sind die Winkel EGB, BGH den Winkeln BGH, GHD gleich. Aber die Winkel EGB, BGH sind (13. Saz.) zwey rechten gleich; folglich sind auch die Winkel BGH, GHD zwey rechten gleich.

Wenn demnach zwey parallele Linien u. s. w. w. z. e. w.

30. *Saz.*

Lehrsaz. Gerade Linien, die *einer* dritten prallel sind, sind einander selbst parallel.

Es seyen die beyden geraden Linien AB, CD der EF parallel, so behaupte ich, dass auch die AB der CD parallel sey.

Beweis. Die drey Linien AB, CD, EF werden von der Linie GK geschnitten. Da nun die zwey Parallelen AB, EF von der Linie GK geschnitten werden, so ist (29. Saz.) der Winkel AGH dem Winkel GHF gleich. Ferner, da die zwey Parallelen EF, CD von der Linie GK geschnitten werden, so ist (29. Saz.) der Winkel GHF dem Winkel GKD gleich. Es ist aber gezeigt worden, dass der Winkel AGK dem Winkel GHF gleich sey; folglich sind auch die Winkel AGK, GKD einander gleich, und diese sind Wechselwinkel; folglich ist (27. Saz.) die Linie AB der CD parallel.

Demnach sind zwey gerade Linien u. s. w. w. z. e. w.

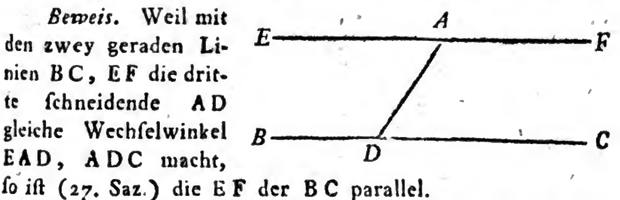
31. *Saz.*

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt mit einer gegebenen geraden Linie eine Parallele zu ziehen.

Es sey der gegebene Punkt A, die gegebene gerade Linie BC, man soll durch den Punkt A mit der BC eine Parallele ziehen.

Auf-

Auflöfung. Man nehme in der Linie BC nach Belieben einen Punkt D an, ziehe die AD, und feze an den Punkt A der Linie AD (23. Saz.) einen Winkel DAE, der dem Winkel ADC gleich fey. Hierauf verlängere man die AE in gerader Richtung bis nach F.



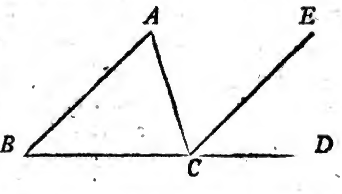
Beweis. Weil mit den zwey geraden Linien BC, EF die dritte fchneidende AD gleiche Wechfelwinkel EAD, ADC macht, fo ift (27. Saz.) die EF der BC parallel.

Demnach ift durch den gegebenen Punkt A mit der gegebenen geraden Linie BC die EAF parallel gezogen worden, w. z. v. w.

32. *Saz.*

Lehrfaz. In jedem Dreyecke ift, wenn man eine feiner Seiten verlängert, der äuffere Winkel feinen zwey innern Gegenwinkeln, und die drey innern Winkel des Dreyecks find zwey rechten gleich.

Es fey das Dreyeck ABC, und eine feiner Seiten werde verlängert nach D, fo behaupte ich, dafs der äuffere Winkel ACD den beyden innern Gegenwinkeln CAB, ABC und dafs die drey innern Winkel ABC, BCA, CAB des Dreyecks zwey rechten gleich feyen.



Beweis. Man ziehe (31. Saz.) durch den Punkt C mit der AB die CE parallel. Da nun die AB der CE parallel ift, und da beyde von der dritten AC gefchnitten werden, fo find (19. Saz.) die Wechfelwinkel BAC, ACE einander gleich. Da ferner die AB der CE parallel ift, und beyde von der dritten BD gefchnitten werden, fo ift der äuffere Winkel ECD dem innern Gegenwinkel ABC gleich. Es ift aber

 auch

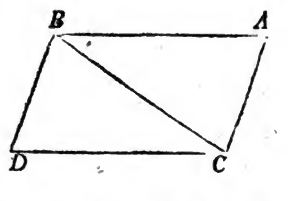
auch gezeigt worden, dafs der Winkel ACE dem Winkel BAC gleich fey, folglich ift der ganze äuffere Winkel ACD den beyden innern Gegenwinkeln BAC, ABC gleich. Man feze zu beyden den Winkel ACB hinzu, fo find die Winkel ACD, ACB den drey Winkeln ABC, BCA, CAB gleich. Aber die Winkel ACD, ACB find (13. Saz.) zwey rechten gleich; folglich find auch die Winkel ACB, CBA, CAB zwey rechten gleich.

Demnach ift in jedem Dreyecke u. f. w. w. z. e. w.

33. *Saz.*

Lehrfaz. Gerade Linien, welche die Endpunkte zweyer gleichen und parallelen Linien an einerley Seite mit einander verbinden, find felbft gleich und parallel.

Es feyen die zwey gleiche und parallele Linien AB, CD und ihre Endpunkte werden an einerley Seite von den Linien AC, BD verbunden, fo behaupte ich, dafs auch die AC, BD gleich und parallel feyen.



Beweis. Man ziehe die BC. Da nun die AB der CD parallel ift, und beyde von der dritten BC gefchnitten werden, fo find (29. Saz.) die Wechfelwinkel ABC, BCD einander gleich. Da ferner die AB der CD gleich, und die BC gemeinfchaftlich ift, fo find die beyden AB, BC den beyden CD, BC ftückweife gleich, auch ift der Winkel ABC dem Winkel BCD gleich; folglich ift (4. Saz.) auch die Grundlinie AC der Grundlinie BD, und das ganze Dreyeck ABC dem ganzen Dreyecke BCD gleich, auch find in beyden die übrigen Winkel, welche gleichen Seiten gegenüber liegen, einander ftückweife gleich; folglich ift der Winkel ACB dem Winkel CBD gleich. Da nun mit den zwey geraden Linien AC, BD die dritte fchneidende BC gleiche Wechfelwinkel ACB, CBD macht, fo ift (27. Saz.) die

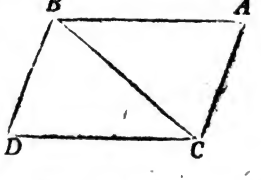
AC der BD parallel. Es ist aber auch gezeigt worden, dass sie ihr gleich sey.

Demnach sind zwey gerade Linien u. s. w. w. z. e. w.

34. *Saz.*

Lehrsaz. Die Gegenseiten und Gegenwinkel der Parallelogramme sind einander gleich, auch werden sie von der Diagonale halbirt.

Es sey das Parallelogramm ACDB, dessen Diagonale BC, so behaupte ich, dass die Gegenseiten und Gegenwinkel des Parallelogramms ACDB einander gleich seyen, und dass die Diagonale BC dasselbe halbire.



Beweis. Da die AB der CD parallel ist, und beyde von der Linie BC geschnitten werden, so sind (29. Saz) die Wechselwinkel ABC, BCD einander gleich. Da ferner die AC der BD parallel ist, und beyde von der BC geschnitten werden so sind die Wechselwinkel ACB, CBD einander gleich; Demnach sind in den zwey Dreyecken ABC, CBD, die zwey Winkel ABC, BCA den zwey Winkeln BCD, CBD stückweise gleich, auch ist eine Seite des einen einer Seite des andern gleich, nämlich die an den gleichen Winkeln liegende und beyden gemeinschaftliche BC; folglich sind (26. Saz.) auch die übrigen Seiten in beyden einander stückweise gleich, und der dritte Winkel des einen ist dem dritten Winkel des andern gleich. Es ist also die Seite AB der CD, die Seite AC der BD, und der Winkel BAC dem Winkel BDC gleich. Und weil der Winkel ABC dem Winkel BCD, der Winkel CBD aber dem Winkel ACB gleich ist, so ist der ganze Winkel ABD dem ganzen Winkel ACD gleich. Es ist aber auch gezeigt worden, dass der Winkel BAC dem Winkel BDC gleich sey; folglich sind die Gegenseiten und Gegenwinkel der Parallelogramme einander gleich.

Ich behaupte ferner, dass die Diagonale dieselbigen halbire.

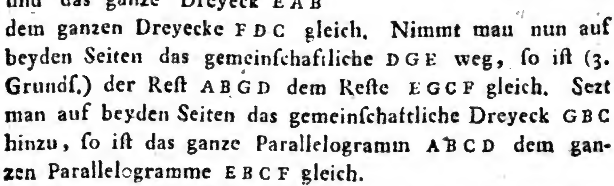
Denn weil die AB der CD gleich, und die BC gemeinschaftlich ist, so sind die beyden AB, BC den beyden DC CB stückweise gleich, und der Winkel ABC ist dem Winkel BCD gleich; folglich ist (4. Saz.) auch die Grundlinie AC der Grundlinie BD, und das ganze Dreyeck ABC dem ganzen Dreyecke BCD gleich; und mithin halbirt die Diagonale BC das Parallelogramm ACDB, w. z. e. w.

35. *Saz.*

Lehrsaz. Parallelogramme auf einerley Grundlinie und zwischen einerley Parallelen sind einander gleich.

Es seyen die Parallelogramme ABCD, EBCF auf einerley Gruudlinie BC, und zwischen einerley Parallelen AF, BC, so behaupte ich, dass das Parallelogramm ABCD dem Parallelogramme EBCF gleich sey.

Beweis. Weil ABCD ein Parallelogramm ist, so ist (34. Saz.) die AD der BC gleich. Aus eben dem Grunde aber ist auch die EF der BC gleich, folglich ist auch die AD der EF gleich, auch ist die DE gemeinschaftlich; folglich ist (2. Grundf.) die ganze AE der ganzen DF gleich. Es ist aber (34. Saz.) auch die AB der DC gleich folglich sind die beyden EA, AB den beyden FD, DC stückweise gleich, auch ist (29. Saz.) der Winkel FDC, als äusserer Winkel, seinem innern Gegenwinkel EAB gleich; folglich ist (4. Saz.) auch die Grundlinie EB der Grundlinie FC, und das ganze Dreyeck EAB dem ganzen Dreyecke FDC gleich. Nimmt man nun auf beyden Seiten das gemeinschaftliche DGE weg, so ist (3. Grundf.) der Rest ABGD dem Reste EGCF gleich. Sezt man auf beyden Seiten das gemeinschaftliche Dreyeck GBC hinzu, so ist das ganze Parallelogramm ABCD dem ganzen Parallelogramme EBCF gleich.



Demnach sind Parallelogramme u. s. w. w. z. e. w.

36. *Saz.*

36. *Saz.*

Lehrsaz. Parallelogramme auf gleichen Grundlinien und zwischen einerley Parallelen sind einander gleich.

Es seyen die Parallelogramme ABCD, EFGH auf gleichen Grundlinien BC, FG und zwischen einerley Parallelen AH, BG, so behaupte ich, dass das Parallelogramm ABCD dem Parallelogramme EFGH gleich sey.

Beweis. Man ziehe die BE, CH. Da nun die BC der FG, die FG aber der EH gleich ist, so ist auch die BC der EH gleich; sie sind aber auch parallel, und beyde werden von den Linien BE, CH verbunden. Linien aber, die gleiche und parallele Linien an einerley Seite verbinden, sind (23. Saz.) selbst gleich und parallel; folglich sind die EB, CH gleich und parallel, und es ist EBCH ein Parallelogramm, und (35. Saz.) dem Parallelogramme ABCD gleich, denn es hat mit ihm einerley Grundlinie BC, und ist zwischen einerley Parallelen BC, AH. Aus eben dem Grunde aber ist auch das Parallelogramm EFGH dem EBCH gleich; folglich ist auch das Parallelogramm ABCD dem EFGH gleich.

A D E H
B C F G

Demnach sind Parallelogramme u. s. w. w. z. e. w.

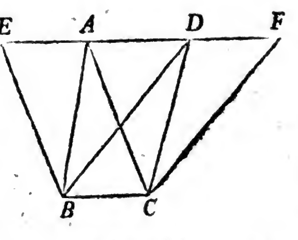
37. *Saz.*

Lehrsaz. Dreyecke auf einerley Grundlinie und zwischen einerley Parallelen sind einander gleich.

Es seyen die Dreyecke ABC, DBC auf einerley Grundlinie BC und zwischen einerley Parallelen AD, BC, so behaupte ich, dass das Dreyeck ABC dem Dreyecke DBC gleich sey.

Beweis. Man verlängere die AD auf beyden Seiten nach E, F und ziehe (31. Saz.) durch B der CA die BE, und durch C der BD die CF parallel. Beyde Figuren EBCA,

DB



DBCF ſind alſo Parallelogramme und (35. Saz.) einander gleich, denn ſie ſind auf einerley Grundlinie BC, und zwiſchen einerley Parallelen BC, EF. Auch iſt das Dreyeck ABC die Hälfte des Parallelogramms EBCA, denn es wird (34. Saz.) von der Diagonale AB halbirt, und das Dreyeck DBC iſt die Hälfte des Parallelogramms DBCF, denn es wird von der Diagonale DC halbirt. Aber von gleichen Dingen ſind auch die Hälften einander gleich; folglich iſt das Dreyeck ABC dem Dreyecke DBC gleich.

Demnach ſind Dreyecke u. ſ. w. w. z. e. w.

38. *Saz.*

Lehrſaz. Dreyecke auf gleichen Grundlinien und zwiſchen einerley Parallelen ſind einander gleich.

Es ſeyen die Dreyecke ABC, DEF auf den gleichen Grundlinien BC, EF und zwiſchen einerley Parallelen BF, AD, ſo behaupte ich, daſs das Dreyeck ABC dem Dreyecke DEF gleich ſey.

Beweis. Man verlängere die AD auf beyden Seiten nach G, H und ziehe durch B (31. Saz.) der CA die BG, durch F aber der DE die FH parallel. Beyde Figuren GBCA, DEFH ſind alſo Parallelogramme, und (36. Saz.) einander gleich, denn ſie ſind auf gleichen Grundlinien BC, EF, und zwiſchen einerley Parallelen BF, GH. Von dem Parallelogramme GBCA aber iſt das Dreyeck ABC die Hälfte, denn es wird (34. Saz.) von der Diagonale AB halbirt, und von dem Parallelogramme DEFH iſt das Dreyeck FED die Hälfte, denn es wird von der Diagonale DF halbirt.

Von

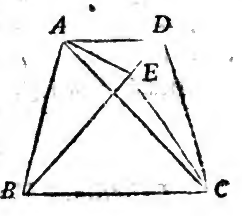
Von gleichen Dingen aber ſind auch die Hälften einander gleich; folglich iſt das Dreyeck ABC dem Dreyecke DEF gleich.

Demnach ſind Dreyecke auf gleichen Grundlinien und zwiſchen einerley Parallelen u. ſ. w. w. z. e. w.

39. *Saz.*

Lehrſaz. Gleiche Dreyecke auf einerley Grundlinie und an einerley Seite ſind auch zwiſchen einerley Parallelen.

Es ſeyen die gleichen Dreyecke ABC, DBC, auf einerley Grundlinie BC und an einerley Seite, ſo behaupte ich, daſs ſie auch zwiſchen einerley Parallelen ſeyen. Man ziehe nämlich die AD, ſo behaupte ich, daſs die AD der BC parallel ſey.



Beweis. Wäre dies nicht, ſo ziehe man (31. Saz.) durch den Punkt A der BC die AE parallel, und ziehe die EC. Nun iſt (37. Saz.) das Dreyeck ABC dem Dreyecke EBC gleich, denn es iſt mit ihm auf einerley Grundlinie BC und zwiſchen einerley Parallelen BC, AE. Aber nach der Vorausſezung iſt das Dreyeck ABC dem Dreyecke DBC gleich; folglich iſt auch das Dreyeck DBC dem Dreyecke EBC, das heiſst, das gröſſere dem kleineren, gleich, welches unmöglich iſt; folglich iſt nicht die AE der BC parallel. Auf gleiche Art kann aber gezeigt werden, daſs auch keine andere, auſſer der AD, ihr parallel ſey; folglich iſt die AD der BC parallel.

Demnach ſind gleiche Dreyecke u. ſ. w. w. z. e. w.

40. *Saz.*

Lehrſaz. Gleiche Dreyecke auf gleichen Grundlinien und an einerley Seite ſind zwiſchen einerley Parallelen.

Es

Es ſeyen die gleichen Dreyecke A B C, C D E auf den gleichen Grundlinien B C, C E und an einerley Seite, ſo behaupte ich, daſs ſie auch zwiſchen einerley Parallelen ſeyen. Man ziehe nämlich die A D, ſo behaupte ich, daſs die A D der B E parallel ſey.

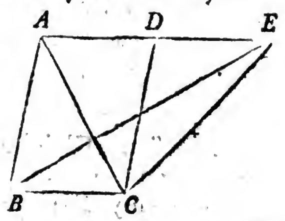
Beweis. Wäre dies nicht, ſo ziehe man (31. Saz.) durch A der B E die F A parallel, und ziehe noch die F E. Nun iſt (38. Saz.) das Dreyeck A B C dem Dreyecke F C E gleich, denn beyde ſind auf den gleichen Grundlinien B C, C E und zwiſchen einerley Parallelen B E, A F. Aber das Dreyeck A B C iſt dem Dreyecke D C E gleich; folglich iſt auch das Dreyeck D C E dem Dreyecke F C E, das heiſst, das gröſſere dem kleinern, gleich, welches unmöglich iſt; folglich iſt nicht die A F der B E parallel. Eben ſo kann aber gezeigt werden, daſs ihr auch keine andere, auſſer der A D, parallel ſey; folglich iſt die A D der B E parallel.

Demnach ſind gleiche Dreyecke u. ſ. w. w. z. e. w.

41. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn ein Parallelogramm und ein Dreyeck auf einerley Grundlinie und zwiſchen einerley Parallelen ſind, ſo iſt das Parallelogramm das Doppelte des Dreyecks.

Es ſey das Parallelogramm A B C D und das Dreyeck E B C auf einerley Grundlinie B C, und zwiſchen einerley Parallelen B C, A E, ſo behaupte ich, daſs das Parallelogramm A B C D das Doppelte des Dreyecks E B C ſey.



Beweis. Man ziehe die A C. Nun iſt (37. Saz.) das Dreyeck A B C dem Dreyecke E B C gleich, denn es iſt mit ihm auf einerley Grundlinie B C, und zwiſchen einerley Parallelen B C, A E. Aber das Par-

alle-

allelogramm ABCD ist das Doppelte des Dreyecks ABC, denn (34. Saz.) wird es von der Diagonale AC halbirt; folglich ist auch das Parallelogramm ABCD das Doppelte des Dreyecks EBC.

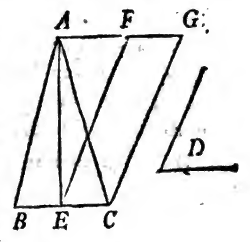
Wenn demnach ein Parallelogramm und ein Dreyeck u. s. w. w. z. e. w.

42. *Saz.*

Aufgabe. Einem gegebenen Dreyecke ein Parallelogramm unter einem Winkel gleich zu machen, der einem gegebenen geradlinigen Winkel gleich sey.

Es sey das gegebene Dreyeck ABC, der gegebene geradlinige Winkel D, man soll dem gegebenen Dreyecke ABC ein Parallelogramm unter einem Winkel gleich machen, der dem gegebenen geradlinigen Winkel D gleich sey.

Auflösung. Man halbire (10. Saz.) die BC in dem Punkte E, und ziehe die AE, hierauf seze man (23. Saz.) an den Punkt E der Linie EC einen Winkel CEF der dem Winkel D gleich sey, und ziehe (23. Saz.) durch A der EC die AG, und durch C der FE die CG parallel, so ist FECG ein Parallelogramm.



Beweis. Da die BE der EC gleich ist, so ist (38. Saz.) das Dreyeck ABE dem Dreyecke AEC gleich, denn sie sind auf gleichen Grundlinien BE, EC, und zwischen einerley Parallelen BC, AG; folglich ist das Dreyeck ABC das Doppelte des Dreyecks AEC. Es ist aber (41. Saz.) das Parallelogramm FECG das Doppelte des Dreyecks AEC, denn es hat mit ihm einerley Grundlinie, und ist zwischen einerley Parallelen; folglich ist (6. Grunds.) das Parallelogramm FECG dem Dreyecke ABC gleich, und hat einen Winkel CEF, der dem gegebenen Winkel D gleich ist.

Demnach ist dem gegebenen Dreyecke ABC das Parallelogramm FECG gleich gemacht worden, unter dem Winkel FEC, der dem Winkel D gleich ist. w. z. v. w.

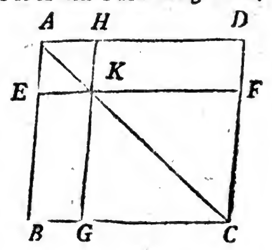
43. Saz.

43. *Saz.*

Lehrsaz. In jedem Parallelogramme sind die Ergänzungen der um die Diagonale herumliegenden Parallelogramme einander gleich.

Es sey das Parallelogramm ABCD, seine Diagonale AC, um die Diagonale AC liegen die Parallelogramme EH, FG deren Ergänzungen seyen BK, KD, so behaupte ich, dass die Ergänzung BK der KD gleich sey.

Beweis. Da ABCD ein Parallelogramm, und AC seine Diagonale ist, so ist (34. Saz.) das Dreyeck ABC dem Dreyecke ADC gleich. Ferner da EKHA ein Parallelogramm, und AK seine Diagonale ist, so ist das Dreyeck AEK dem Dreyecke AHK gleich. Aus eben dem Grunde ist auch das Dreyeck KFC dem Dreyecke KGC gleich. Da nun das Dreyeck AEK dem Dreyecke AHK, und das Dreyeck KFC dem Dreyecke KCG gleich ist, so sind die zwey Dreyecke AEK, KCG zusammen den zwey Dreyecken AHK, KFC zusammen gleich. Es ist aber auch das ganze Dreyeck ABC dem ganzen Dreyecke ADC gleich; folglich ist (3. Grunds.) auch der eine Rest, die Ergänzung BK, dem andern Reste, der Ergänzung KD, gleich.



Demnach sind in jedem Parallelogramme u. s. w. w. z. e. w.

44. *Saz.*

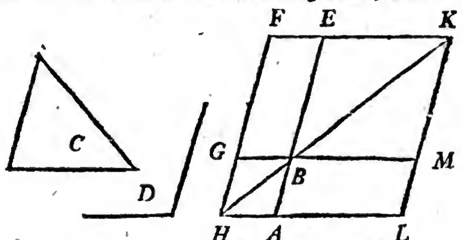
Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie ein Parallelogramm, das einem gegebenen Dreyecke gleich sey, unter einem gegebenen geradlinigen Winkel zu beschreiben.

Es sey die gegebene gerade Linie AB, das gegebene Dreyeck C, der gegebene geradlinige Winkel D, und man soll auf der gegebenen geraden Linie AB, unter einem Winkel, der

der dem gegebenen Winkel D gleich sey, ein Parallelogramm beschreiben, das dem gegebenen Dreyecke C gleich sey.

Auflösung. Man mache (42. Saz.) unter dem Winkel EBG, der dem Winkel D gleich sey, dem Dreyecke C das Parallelogramm BEFG gleich, und seze die BE in gerader Linie an die AB, hierauf verlängere man die FG nach H, ziehe (31. Saz.) durch den Punkt A der BG oder EF die AH parallel, und ziehe die HB. Da nun die Parallelen AH, EF von der Linie HF geschnitten werden, so sind (29. Saz.) die Winkel AHF, HFE zwey rechten gleich; folglich die Winkel BHG, GFE kleiner, als zwey rechte. Linien aber, die unter Winkeln welche kleiner, als zwey rechte, sind, geschnitten werden, treffen, so weit, als nöthig ist, verlängert (11. Grunds.) zusammen; folglich treffen die HB, FE verlängert zusammen. Man verlängere sie also (2. Ford.) und sie treffen in dem Punkte K zusammen; so ziehe man (31. Saz.) durch den Punkt K der EA oder FH die KL parallel, und verlängere die AH, GB nach L, M.

Beweis. Ec ist HLKF ein Parallelogramm, dessen Diagonale KH, und um die Diagonale HK liegen die Parallelogramme AG, ME, deren Ergänzungen sind LB, BF; folglich ist (43. Saz.) die LB der BF gleich. Es ist aber BF dem Dreyecke C gleich; folglich ist auch LB dem Dreyecke C gleich. Und weil (15. Saz.) der Winkel GBE dem Winkel ABM, und auch dem Winkel D gleich ist, so ist auch der Winkel ABM dem Winkel D gleich.



Demnach ist auf der gegebenen geraden Linie AB, unter dem Winkel ABM, welcher dem Winkel D gleich ist, das Parallelogramm AM beschrieben worden, das dem gegebenen Dreyecke C gleich ist. w. z. v. w.

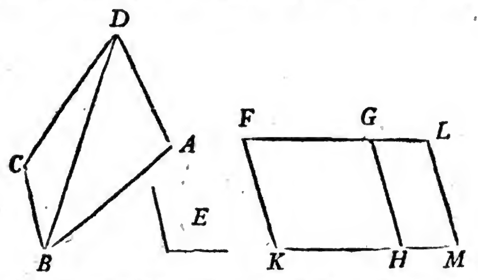
45. *Saz.*

45. *Saz.*

Aufgabe. Einer gegebenen geradlinigen Figur ein Parallelogramm unter einem gegebenen geradlinigen Winkel gleich zu machen.

Es sey die gegebene geradlinige Figur ABCD, der gegebenen geradlinige Winkel E; man soll der geradlinigen Figur ABCD unter einem Winkel, der dem E gleich sey, ein Parallelogramm gleich machen.

Auflösung. Man ziehe die DB, und mache (42. Saz.) unter dem Winkel HKF, der dem Winkel E gleich sey, das Parallelogramm FH dem Dreyecke ADB gleich. Hierauf beschreibe man auf der Linie GH das Parallelogramm



GM, das dem Dreyecke DBC gleich sey, unter dem Winkel GHM, der dem Winkel E gleich sey.

Beweis. Da der Winkel E jedem der beyden HKF, GHM gleich ist, so ist auch der Winkel HKF dem Winkel GHM gleich. Man seze zu beyden den Winkel KHG hinzu, so sind die Winkel FKH, KHG den Winkeln KHG, GHM gleich. Aber (29. Saz.) sind die Winkel FKH, KHG zwey rechten gleich; folglich sind auch die Winkel KHG, GHM zwey rechten gleich. Weil nun an dem Punkte H der Linie GH zwey gerade Linien KH, HM, die nicht nach einerley Seite zu liegen, Nebenwinkel machen, die zwey rechten gleich sind, so liegt (14. Saz.) die KH mit der HM in *einer* geraden Linie. Da ferner die Parallelen KM, FG von der Linie HG geschnitten werden, so sind die Wechselwinkel MHG, HGF (29. Saz.) einander gleich. Sezt man also zu bey-

beyden den Winkel HGL hinzu, so sind die Winkel MHG, HGL den Winkeln HGF, HGL gleich. Aber die Winkel MHG, HGL sind (29. Saz.) zwey rechten gleich; folglich sind auch die Winkel HGF, HGL zwey rechten gleich, und mithin liegt die FG mit der GL in *einer* geraden Linie. Da nun die KF der HG gleich und parallel ist, und eben so die HG der ML, so ist (1. Grundf. u. 30. Saz.) auch die KF der ML gleich und parallel, und beyde werden von den geraden Linien KM, FL verbunden; folglich sind (33. Saz.) auch die KM, FL gleich uud parallel, und mithin ist KFLM ein Parallelogramm. Da aber das Dreyeck ABD dem Parallelogramme HF, und das Dreyeck ABC dem Parallelogramme GM gleich ist, so ist die ganze geradlinige Figur ABCD dem ganzen Parallelogramme KFLM gleich.

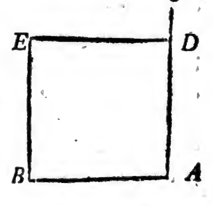
Demnach ist der gegebenen geradlinigen Figur ABCD das Parallelogramm KFLM gleich gemacht worden, unter dem Winkel FKM, der dem gegebenen Winkel E gleich ist, w. z. v. w.

46. *Saz.*

Aufgabe. Von einer gegebenen geraden Linie das Quadrat zu machen.

Es sey die gegebene gerade Linie AB und man soll von der Linie AB das Quadrat machen.

Auflösuug. Man errichte (11. Saz.) in dem Punkte A der Linie AB die AC auf ihr lothrecht, und mache (3. Saz.) der AB die AD gleich. Hierauf ziehe man (31. Saz.) durch den Punkt D der AB die DE, und durch den Punkt B der AD die BE parallel.



Beweis. Nach der Construction ist ADEB ein Parallelogramm, folglich ist die AB der DE gleich. Aber die AB ist auch der AD gleich; folglich sind die vier Seiten BA, AD, DE, EB alle einander gleich, und mithin ist ADEB ein gleichseitiges Parallelogramm. Ich behaupte aber, dass es auch rechtwinkelig sey. Denn weil die Parallelen AB, DE von der Linie AD geschnitten werden, so sind

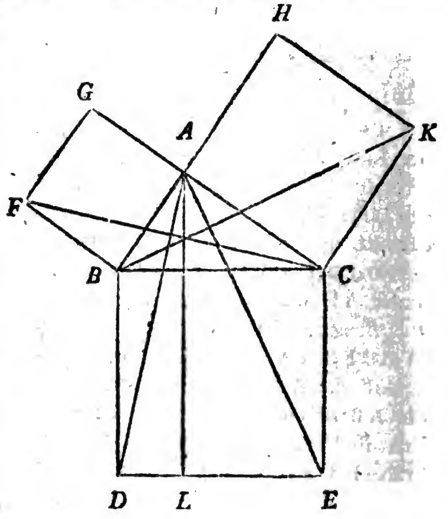
(29. Saz.)

(29. Saz.) die Winkel BAD, ADE zwey rechten gleich. Aber der Winkel BAD ist nach der Construction ein rechter; folglich ist auch der ADE ein rechter. In Parallelogrammen aber sind (34. Saz.) die Gegenseiten und Gegenwinkel einander gleich; folglich ist auch jeder der beyden Gegenwinkel ABE, BED ein rechter, und daher ADEB rechtwinkelig. Es ist aber gezeigt worden, daſs es auch gleichseitig sey; folglich ist es ein Quadrat, und es ist von der Linie AB beschrieben, w. z. v. w.

47. *Saz.*

Lehrsaz. In den rechtwinkeligen Dreyecken ist das Quadrat, welches von der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite beschrieben wird, den Quadraten, welche von den ihn einschlieſsenden Seiten beschrieben werden gleich.

Es sey das rechtwinkelige Dreyeck ABC, und in demselben der Winkel BAC ein rechter, so behaupte ich, daſs das Quadrat, das von der Seite BC beschrieben wird, den Quadraten, die von den Seiten BA, AC beschrieben werden, gleich sey.



Beweis. Man beschreibe von der Seite BC das Quadrat BDEC, von den Seiten BA, AC die Quadrate GB, HC und ziehe durch den Punkt A der BD oder CE die AL parallel, hierauf ziehe man noch die AD, FC.

Da

Da nun jeder der Winkel BAC, GAG ein rechter ist, und mithin an dem Punkte A der Linie BA die zwey geraden Linien AC, AG, die nicht nach einerley Seite zu liegen, Nebenwinkel machen die zwey rechten, gleich sind, so liegt die CA mit der AG in *einer* geraden Linie. Aus gleichem Grunde liegt auch die AB mit der AH in *einer* geraden Linie. Da nun der Winkel DBC (10. Grundf.) dem Winkel FBA gleich ist, denn es ist jeder von ihnen ein rechter, so seze man zu beyden den Winkel ABC hinzu, und es ist der ganze Winkel DBA dem ganzen Winkel FBC gleich. Da aber die zwey Seiten DB, BA den zwey Seiten CB, BF stückweise gleich sind, und der Winkel DBA dem Winkel FBC gleich ist, so ist (4. Saz.) auch die Grundlinie AD der Grundlinie FC, und das ganze Dreyeck ABD dem ganzen Dreyecke FBC gleich. Nun ist (41. Saz.) von dem Dreyecke ABD das Parallelogramm BL das Doppelte, denn sie haben einerley Grundlinie BD, und sind zwischen einerley Parallelen BD, AL; von dem Dreyecke FBC aber ist das Quadrat GB das Doppelte, denn sie haben einerley Grundlinie FB und sind zwischen einerley Parallelen FB, GC. Von gleichen Dingen aber sind auch die Doppelten einander gleich; folglich ist das Parallelogramm BL dem Quadrate GB gleich. Ziehet man nun noch die Linien AE, BK, so kann auf gleiche Art gezeigt werden, dass auch das Parallelogramm CL dem Quadrate HC gleich sey; folglich ist das ganze Quadrat BDEC den beyden Quadraten GB, HC gleich. Es ist aber BDEC das von der Linie BC beschriebene Quadrat, GB, HC aber sind die von den Linien BA, AC beschriebenen Quadrate; folglich ist das von der Seite BC beschriebene Quadrat BE den von den Seiten BA, AC beschriebenen Quadraten gleich.

Demnach ist in den rechtwinkeligen Dreyecken u. s. w. w. z. e. w.

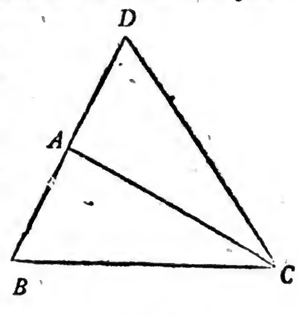
31. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn das Quadrat, das von einer der Seiten eines Dreyecks beschrieben wird, den

den Quadraten, welche von den übrigen Seiten desselben beschrieben werden, gleich ist, so ist der von den zwey übrigen Seiten des Dreyecks eingeschlossene Winkel ein rechter.

Es sey das Quadrat, welches von einer Seite B C des Dreyecks A B C beschrieben wird, den Quadraten, welche von den übrigen Seiten B A, A C des Dreyecks beschrieben werden, gleich, so behaupte ich, daſs der Winkel B A C ein rechter sey.

Beweis. Man errichte (11. Saz.) in dem Punkte A auf der A C die A D lothrecht, mache die A D der B A gleich, und ziehe die D C. Da nun die D A der A B gleich ist, so ist auch das Quadrat, welches von der D A beschrieben wird, dem Quadrate, welches von der A B beschrieben wird, gleich. Man seze zu beyden das Quadrat, welches von der A C beschrieben wird, hinzu, so sind die Qnadrate von D A, A C den Quadraten von B A, A C gleich. Aber den Quadraten von D A, A C ist (47. Saz.) das Quadrat von D C gleich, denn der Winkel D A C ist ein rechter, und den Quadraten von B A, A C ist, nach der Vorausſezung, das Quadrat, von B C gleich; folglich ist das Quadrat von D C dem von B C, und mithin auch die Seite D C der Seite C B gleich. Da nun auch die A D der A B gleich, die A C aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden A D, A C den beyden B A, A C stückweise gleich, auch ist die Grundlinie D C der Grundlinie C B gleich, folglich ist (8. Saz.) der Winkel D A C dem Winkel B A C gleich; der Winkel D A C aber ist ein rechter; folglich ist auch der B A C ein rechter.



Wenn demnach das Quadrat u. s. w. w. z. e. w.

EUKLIDS ELEMENTE.

ZWEYTES BUCH.

Erklärungen.

1. Von jedem *rechtwinkeligen Parallelogramme* (*Recktecke*) ſagt man, *es ſey aus den beyden geraden Linien*, welche den rechten Winkel einſchlieſſen, beſchrieben.

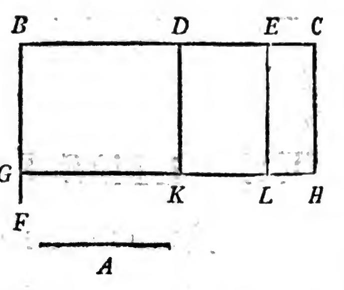
2. In einem Parallelogramme heiſset ein jedes der beyden um die Diagonale herumliegenden Parallelogramme ſammt den beyden Ergänzungen, *ein Gnomon.*

1. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn von zwey geraden Linien die eine in beliebig viele Abſchnitte getheilt wird, ſo iſt das Rechteck aus den beyden Linien den Rechtecken aus der ungetheilten Linie und jedem der Abſchnitte gleich.

Es ſeyen die zwey gerade Linien A, BC, und die Linie BC werde nach Belieben in den Punkten D, E getheilt, ſo behaupte ich, daſs das Rechteck aus den Linien A, BC den Rechtecken aus den Linien A, BD aus A, DE und aus A, EC gleich ſey.

Beweis. Man errichte (1, 11. S.) in dem Punkte B auf der BC das Loth BF, mache die BG der A gleich, und ziehe alsdann (1, 31. S.) durch den Punkt G der BC die



GH, durch die Punkte D, E, C aber der BG die DK, EL, CH parallel.

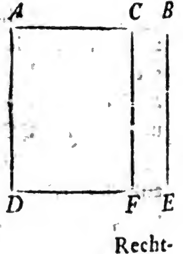
Das Rechteck BH ist den Rechtecken BK, DL, EH gleich. BH aber ist das Rechteck aus A, BC; denn es ist das Rechteck aus BG, BC, die GB aber ist der A gleich. Eben so ist BK das Rechteck aus A, BD; denn es ist das Rechteck aus BG, BD die BG aber ist der A gleich. Ferner ist DL das Rechteck aus A, DE; denn es ist das Rechteck aus DK, DE, die DK aber ist der BG, folglich auch der A, gleich. Endlich ist aus eben den Gründen EH das Rechteck aus A, EC; folglich ist das Rechteck aus A, BC, dem Rechtecke aus A, BD, dem Rechtecke aus A, DE, und dem Rechtecke aus A, EC gleich.

Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w.

2. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie nach Belieben geschnitten wird, so sind die Rechtecke aus der ganze Linie und jedem der Abschnitte dem Quadrate der ganzen Linie gleich.

Die gerade Linie AB werde nach Belieben in dem Punkte C geschnitten, so behaupte ich, dass das Rechteck aus AB, AC sammt dem Rechtecke aus AB, CB dem Quadrate von AB gleich sey.



Beweis. Man mache (1, 46. S.) von AB das Quadrat ADEB, und ziehe (1, 31. S.) durch den Punkt C der AD oder BE die CF parallel.

Nun ist das Parallelogramm AE den Parallelogrammen AF, CE gleich. Es ist aber AE das Quadrat von AB. Das Parallelogramm AF hingegen ist das

Recht-

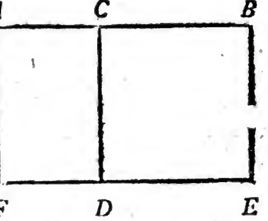
Rechteck aus AB, AC; denn es ist des Rechteck aus AD, AC, die AD aber ist der AB gleich. Endlich ist des Parallelogramm CE das Rechteck ans AB, CB; denn es ist das Rechteck aus BC, BE, die BE aber ist der AB gleich; folglich ist das Rechteck aus AB, AC sammt dem Rechtecke aus AB, BC dem Quadrate von AB gleich.

Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w.

3. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie nach Belieben geschnitten wird, so ist das Rechteck aus der ganzen Linie und einem der beyden Abschnitte dem Rechtecke aus den beyden Abschnitten und dem Quadrate des vorgedachten Abschnitts gleich.

Es werde die gerade Linie AB nach Belieben in dem Punkte C geschnitten, so behaupte ich, daſs das Rechteck aus AB, BC dem Rechtecke aus AC, CB sammt dem Quadrate von CB gleich sey.



Beweis. Man beschreibe (1, 46. S.) von BC das Quadrat CDEB, verlängere die ED bis nach F, und ziehe (1, 31. S.) durch den Punkt A der CD, oder BE die AF parallel.

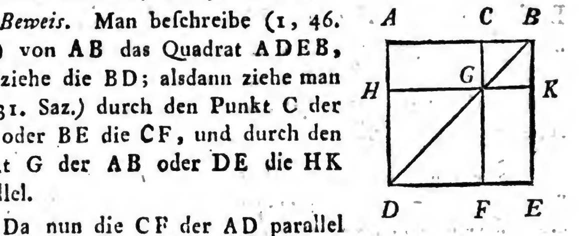
Nun ist das Parallelogramm AE den Parallelogrammen AD, CE gleich. Es ist aber AE das Rechteck aus AB, BC; denn es ist das Rechteck aus AB, BE, die BE aber ist der BC gleich. Das Parallelogramm AD hingegen ist das Rechteck aus AC, CB; denn die CD ist der CB gleich. Endlich ist CE das Quadrat von BC; folglich ist das Rechteck aus AB, BC dem Rechtecke aus AC, CB sammt dem Quadrate von CB gleich.

Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w.

4. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn eine gerade Linie nach Belieben getheilt wird, ſo iſt das Quadrat der ganzen Linie den Quadraten der beyden Abſchnitte und dem doppelten Rechtecke aus beyden Abſchnitten gleich.

Es werde die gerade Linie AB nach Belieben in dem Punkte C geſchnitten, ſo behaupte ich, daſs das Qnadrat von AB den Quadraten von AC, CB und dem doppelten Rechtecke aus AC, CB gleich ſey.



Beweis. Man beſchreibe (1, 46. Saz.) von AB das Quadrat ADEB, und ziehe die BD; alsdann ziehe man (1, 31. Saz.) durch den Punkt C der AD oder BE die CF, und durch den Punkt G der AB oder DE die HK parallel.

Da nun die CF der AD parallel iſt, und die BD dieſe beyden ſchneidet, ſo iſt (1, 29. S.) der äuſſere Winkel BGC ſeinem innern Gegenwinkel ADB gleich. Aber der Winkel ADB iſt (1, 5. S) dem Winkel ABD gleich, weil auch die Seite AB der Seite AD gleich iſt; folglich iſt auch der Winkel CGB dem Winkel ABD oder CBG, und mithin (1, 6. S.) auch die Seite BC der Seite CG gleich. Aber (1, 34. S.) iſt auch die CB der GK, und die CG der BK gleich; folglich iſt auch die GK der KB gleich; und mithin CGKB gleichſeitig. Ich behaupte aber ferner, daſs es auch rechtwinkelig ſey. Denn da die CG der BK parallel iſt, und die CB dieſe beyden ſchneidet, ſo ſind (1, 29. S.) die Winkel KBC, GCB zwey rechten gleich. Es iſt aber (1, 30. Erkl.) KBC ein rechter; folglich iſt auch GCB ein rechter, mithin ſind (1, 34. S.) auch ihre Gegenwinkel CGK, GKB zwey rechte, und CGKB iſt alſo rechtwinkelig. Es iſt aber gezeigt worden, daſs es auch gleichſeitig ſey; folglich iſt es ein Quadrat; und es iſt das Quadrat von BC. Aus eben den Gründen aber iſt auch

auch HF ein Quadrat, und zwar das Quadrat von HG, das ist von AC. Es sind also HF, CK, die Quadrate von AC, CB. Da nun ferner (1, 43. S.) das Parallelogramm AG dem Parallelogramme GE gleich, und AG das Rechteck aus AC, CB ist, indem die GC der CB gleich ist; so ist folglich auch GE dem Rechtecke aus AC, CB gleich; und mithin sind AG, GE dem doppelten Rechtecke aus AC, CB gleich. Es sind aber auch HF, CK die Quadrate von AC, CB; folglich sind die vier Parallelogramme HF, CK, AG, GE den Quadraten von AC, CB und dem doppelten Rechtecke aus AC, CB gleich. Aber die vier Parallelogramme HF, CK, AG, GE sind das ganze Parallelogramm ADEB, welches das Quadrat von AB ist; folglich ist das Quadrat von AB den Quadraten von AC, CB und dem doppelten Rechtecke aus AC, CB gleich.

Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w.

Zusaz. Hieraus erhellet, dass in den Quadraten die um die Diagonale herumliegenden Parallelogramme auch Quadrate sind.

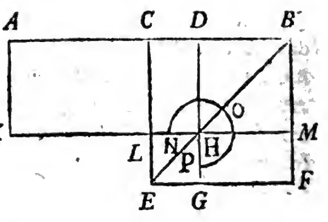
5. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie in gleiche und ungleiche Theile getheilt wird, so ist das Rechteck aus den ungleichen Abschnitten sammt dem Quadrate des Abschnitts zwischen den Theilungspunkten dem Quadrate der halben Linie gleich.

Es werde die Linie AB in dem Punkte C in gleiche, in dem Punkte D aber in ungleiche Theile getheilt so behaupte ich, dass das Rechteck aus AD, DB sammt dem Quadrate von CD dem Quadrate von CB gleich sey.

Beweis. Man beschreibe (1, 46. S.) von CB das Quadrat CEFB, und ziehe die BE; alsdann ziehe man (1, 31. S.) durch den Punkt D der CE oder BF die DHG, durch den Punkt H aber der CB oder EF die KLM, und endlich durch den Punkt A der CL oder BM die AK parallel.

Da



Da nun (1, 43. S.) die Ergänzung CH der Ergänzung HF gleich ist, so ist, wenn man beyderseits das Parallelogramm DM hinzusezt, (2. Grunds.) das ganze Parallelogramm CM dem ganzen Parallelogramme DF gleich. Aber das Parallelogramm CM ist (1, 36. S.) dem Parallelogramme AL gleich, weil die AC der CB gleich ist; folglich ist auch das Parallelogramm AL dem Parallelogramme DF gleich. Man seze beyderseits CH hinzu, so ist das ganze Parallelogramm AH den Parallelogrammen DF, DL gleich. Aber das Parallelogramm AH ist das Rechteck aus AD, DB, weil die DH der DB gleich ist; FD, DL, hingegen ist der Gnomon NOP; folglich ist der Gnomon NOP dem Rechtecke aus AD, DB gleich. Man seze beyderseits LG, welches (2, 4. Zus.) dem Quadrate von CD gleich ist, hinzu, so ist der Gnomon NOP sammt dem Quadrate LG dem Rechtecke aus AD, DB sammt dem Quadrate von CD gleich. Nun ist der Gnomon NOP sammt dem Quadrate LG das ganze Quadrat CEFB, welches das Quadrat von CB ist; folglich ist das Rechteck aus AD, DB sammt dem Quadrate von CD dem Quadrate von CB gleich.

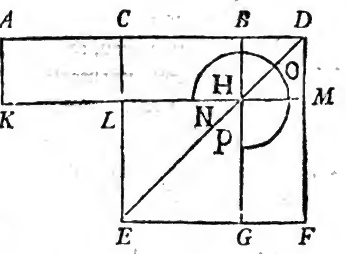
Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w.

6. Saz.

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie halbirt, und ihr eine andere in gleicher Richtung angesezt wird, so ist das Rechteck aus der aus der ganzen und der angesezten bestehenden und der angesezten Linie sammt dem Quadrate der halben Linie dem Quadrate der aus der halben und der angesezten bestehenden Linie gleich.

Es werde die gerade Linie AB in dem Punkte C halbirt, und ihr die gerade Linie BD in gleicher Richtung an-

angesezt, so behaupte ich, dass das Rechteck aus AD, BD sammt dem Quadrate von CB dem Quadrate von CD gleich sey.



Beweis. Man beschreibe (1, 46. S.) von CD das Quadrat CEFD, und ziehe die DE, alsdann ziehe man (1, 31. S.) durch den Punkt B der CE oder DF die BHG, durch den Punkt H aber der AD oder EF die KLM, und endlich durch den Punkt A der CL oder DM die AK parallel.

Da nun die AC der CB gleich ist, so ist (1, 36. S.) auch das Parallelogramm AL dem Parallelogramme CH gleich. Aber das Parallelogramm CH ist (1, 34. S.) dem Parallelogramme HF gleich; folglich ist auch AL dem HF gleich. Man seze beyderseits CM hinzu, so ist das ganze Parallelogramm AM dem Gnomon NOP gleich. Aber AM ist das Rechteck aus AD, BD, denn die DM ist (2, 4. Zus.) der BD gleich; folglich ist der Gnomon NOP dem Rechtecke aus AD, BD gleich. Man seze beyderseits LG, welches dem Quadrate von CB gleich ist, hinzu, so ist das Rechteck aus AD, BD sammt dem Quadrate von CB dem Gnomon NOP und dem Quadrate LG gleich. Aber der Gnomon NOP und das Quadrat LG ist das ganze Quadrat CEFD, welches das Quadrat von CD ist; folglich ist das Rechteck aus AD, BD sammt dem Quadrate von CB dem Quadrate von CD gleich.

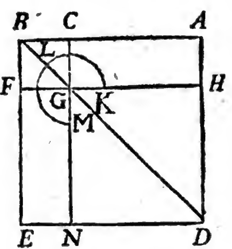
Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w

17. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie nach Belieben in einem Punkte geschnitten wird, so sind die Quadrate der ganzen Linie und eines der Abschnitte dem doppelten Rechtecke aus der ganzen Linie und dem gedachten Abschnitte sammt dem Quadrate des andern Abschnitts gleich.

Es

Es werde die gerade Linie AB in dem beliebigen Punkte C geschnitten, so behaupte ich, dess die Qnadrate von AB, BC dem doppelten Recktecke aus AB, BC und dem Quadrate von AC gleich seyen.



Beweis. Man beschreibe (1. 46. S.) von AB das Qnadrat ADEB, und vollende die Figur. Da nun das Parallelogramm AG (1, 43. S.) dem Parallelogramme GF gleich ist, so ist, wenn man beyderseits CF hinzusezt, das ganze Parallelogramm AF dem ganzen Parallelogramme CE gleich, und folglich ist AF, CE das Doppelte von AF. Nun ist aber AF, CE der Gnomon KLM und das Quadrat CF; folglich ist der Gnomon KLM und das Quadrat CF das Doppelte von AE. Aber auch das doppelte Rechteck aus AB, BC ist das Doppelte von AF, denn die BF ist (2, 4. Zus.) der BC gleich; demnach ist der Gnomon KLM nnd das Quadrat CF dem doppelten Rechtecke aus AB, BC gleich. Man seze beyderseits HN, welches das Quadrat von AC ist, hinzu, so ist der Gnomon KLM sammt den Quadraten CF, HM dem doppelten Rechtecke aus AB, BC und dem Quadrate von AC gleich. Aber der Gnomon KLM und die Quadrate CF, HN sind das ganze Quadrat ADEB und CF, das ist die Quadrate von AB, BC; folglich sind die Quadrate von AB, BC dem doppelten Rechtecke aus AB, BC sammt dem Quadrate von AC gleich.

Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w.

8. *Saz.*

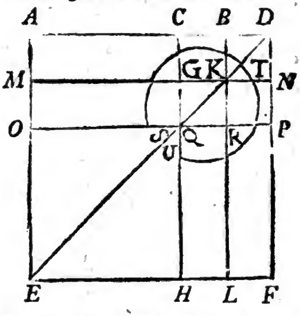
Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie nach Belieben in einem Punkte geschnitten wird, so ist das vierfache Rechteck aus der ganzen Linie und einem der Abschnitte sammt dem Quadrate der aus der ganzen und dem erst gedachten Abschnitte bestehenden Linie gleich.

Es

Es werde die gerade Linie AB nach Belieben in dem Punkte C geschnitten, so behaupte ich, dass das vierfache Rechteck aus AB, BC sammt dem Quadrate von AC dem Quadrate der aus AB, BC bestehenden Linie AD gleich sey.

Beweis. Man seze die BD in gerader Linie an die AB, und mache die BD der CB gleich; alsdann beschreibe man (1, 46. S.) von AD das Quadrat AEFD und vollende die Figur.

Da nun die CB der BD, aber auch (1, 34. S.) die CB der GK, und die BD der KN gleich ist, so ist auch GK der KN gleich. Aus eben den Gründen aber ist auch die QR der RP gleich. Da nun die CB der BD und die GK der KN gleich ist, so ist (1, 36. S.) das Parallelogramm CK dem Parallelogramme BN, und das Parallelogramm GR dem Parallelogramme RN gleich. Nun ist aber (1, 43. S.) CK dem RN gleich, denn sie sind die Ergänzungen des Parallelogramms CP; folglich ist auch BN dem GR gleich, und mithin sind die vier Parallelogramme BN, CK, GR, RN alle einander gleich, also alle viere zusammen das Vierfache von CK. Da ferner die CB der BD, aber auch die BD der BK, das ist (1, 34. S.) der CG, die CB aber der GK, das ist der GQ, gleich ist, so ist die CG der GQ gleich. Es ist aber auch die QR der RP gleich; folglich ist auch (1, 36, S.) das Parallelogramm AG dem Parallelogramme MQ, und das Parallelogramm QL dem Parallelogramme RF gleich. Nun ist aber, (1, 43. S.) MQ dem QL gleich, denn sie sind die Ergänzungen des Parallelogramms ML; folglich ist auch AG dem RF gleich; und mithin sind die vier Parallelogramme AG, MQ, QL, RF alle einander gleich; also alle viere zusammen das Vierfache von AG. Es ist aber gezeigt worden, dass auch die vier Parallelogramme BN, CK, GR, RN das Vierfache



fache von CK seyen; folglich sind die acht Parallelogramme, welche den Gnomon STU einschliessen, das Vierfache von AK. Da nun AK das Rechteck aus AB, BD ist, indem die BK (2, 4. Zus.) der BD, das ist der CB gleich ist, so ist das vierfache Rechteck aus AB, BC das Vierfache von AK. Es ist aber gezeigt worden, dass auch der Gnomon STU das Vierfache von AK sey; folglich ist das vierfache Rechteck aus AB, BC dem Gnomon STU gleich. Man seze beyderseits OH, welches (2, 4. Zus.) dem Quadrate von AC gleich ist, hinzu, so ist das vierfache Rechteck aus AB, BC sammt dem Quadrate von AC dem Gnomon STU und dem Quadrate OH gleich. Es ist aber der Gnomon STU und das Quadrat OH das ganze Quadrat AEFD, welches das Quadrat von AD ist; folglich ist das vierfache Rechteck aus AB, BC sammt dem Quadrate von AC dem Quadrate von AD, das ist, dem Quadrate der aus AB und BC bestehenden Linie, gleich.

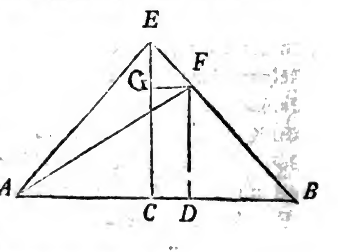
Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w.

9. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie in gleiche und ungleiche Theile getheilt wird, so sind die Quadrate der ungleichen Abschnitte doppelt so grofs, als das Quadrat der halben Linie und des Abschnitts zwischen den Theilungspunkten.

Es werde die gerade Linie AB in dem Punkte C in gleiche, in dem Punkte D aber in ungleiche Theile getheilt, so behaupte ich, dass die Quadrate von AD, DB doppelt so grofs seyen, als die Quadrate von AC, CD.

Beweis. Man errichte (1, 11. S.) in dem Punkte C auf der AB das Loth CE, mache die CE den beyden AC, CB gleich, und ziehe die EA, EB; alsdann ziehe man (1, 31. S.) durch den Punkt D der EC die DF, durch den Punkt F aber der AB die FG parallel, und ziehe die AF.



Da

Da nun die AC der CE gleich iſt, ſo iſt (1, 5. S.) auch der Winkel EAC dem Winkel AEC gleich; und da der Winkel bey C ein rechter iſt, ſo ſind (1, 32. S.) die beyden andern EAC, AEC zuſammen einem rechten gleich; folglich iſt jeder von den beyden EAC, AEC die Hälfte eines rechten. Aus eben den Gründen aber iſt auch jeder von den beyden CEB, EBC die Hälfte eines rechten; folglich iſt der ganze Winkel AEB ein rechter.

Da nun der Winkel GEF die Hälfte eines rechten, aber EGF ein rechter iſt, indem er (1, 29. S.) ſeinem inneren Gegenwinkel ECB gleich iſt, ſo iſt auch der übrige Winkel EFG die Hälfte eines rechten, und folglich iſt der Winkel GEF dem Winkel EFG, und mithin auch (1, 6. S.) die Seite EG der FG gleich.

Da ferner der Winkel bey B die Hälfte eines rechten, der Winkel FDB aber ein rechter iſt, weil er (1, 29. S.) ſeinem innern Gegenwinkel ECB gleich iſt, ſo iſt auch der übrige Winkel BFD die Hälfte eines rechten; folglich iſt der Winkel bey B dem Winkel BFD, und mithin (1, 6. S.) auch die Seite DE der Seite DB gleich.

Da nun die AC der CE gleich iſt, ſo iſt auch das Quadrat von AC dem Quadrate von CE gleich, und folglich ſind die Quadrate von AC, CE, doppelt ſo groſs, als das Quadrat von AC. Den Quadraten von AC, CE aber iſt (1, 47. S.) das Quadrat EA gleich, denn der Winkel ACE iſt ein rechter; folglich iſt auch das Quadrat von EA doppelt ſo groſs, als das Quadrat von AC.

Da ferner die EG der GF gleich iſt, ſo iſt auch das Quadrat von EG dem Quadrate von GF gleich; folglich ſind die Quadrate EG, GF doppelt ſo groſs, als das Quadrat von GF. Den Quadraten von EG, GF aber iſt (1, 47. S.) das Quadrat von EF gleich; folglich iſt auch das Quadrat von EF doppelt ſo groſs, als das Quadrat von GF. Es iſt aber (1, 34. S.) die GF der CD gleich; demnach iſt das Quadrat von EF doppelt ſo groſs, als das Quadrat von CD. Es iſt aber auch das Quadrat von AE doppelt ſo groſs, als das Quadrat von AC; folglich ſind die Quadrate von AE, EF doppelt ſo groſs, als die Quadrate von AC,

CD.

CD. Den Quadraten von AE, EF aber ist (1, 47. S.) das Quadrat von AF gleich, denn der Winkel AEF ist ein rechter; folglich ist das Quadrat von AF doppelt so grofs, als die Quadrate von AC, CD. Dem Quadrate von AF aber sind (1, 47. S.) die Quadrate von AD, DF gleich, denn der Winkel bey D ist ein rechter; folglich sind die Quadrate von AD, DF doppelt so grofs, als die Quadrate von AC, CD. Es ist aber die DF der DB gleich; folglich sind die Quadrate von AD, DB doppelt so grofs, als die Quadrate von AC, CD.

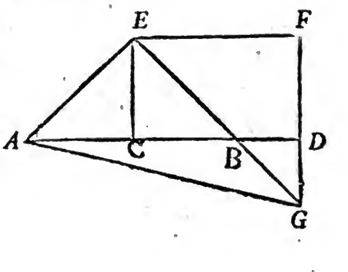
Wenn demnach u. s. w. w. z. e. w.

10. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie halbirt, und ihr eine andere in gleicher Richtung angesezt wird, so ist das Quadrat, der aus der ganzen und der angesezten bestehenden Linie sammt dem Quadrate der angesezten doppelt so grofs, als das Quadrat der halben und der aus der halben und der angesezten bestehenden Linie.

Es werde die gerade Linie AB in dem Punkte C halbirt, und ihr die BD in gleicher Richtung angesezt, so behaupte ich, dafs die Quadrate von AD, DB doppelt so grofs seyen, als die Quadrate von AC, CD.

Beweis. Man errichte (1, 11. S.) in dem Punkt C auf der AB das Loth CE, mache die CE den beyden AC, CB gleich, und ziehe die AE, EB; alsdann ziehe man (1, 31. S.) durch den Punkt E der AD die EF, durch den Punkt D aber der CE die DF parallel.



Da nun die gerade Linie EF die Parallelen EC, FD schneidet, so sind (1, 29. S.) die Winkel CEF, EFD zwey rechten gleich, und mithin die Winkel BEF, EFD klei-

kleiner, als zwey rechte. Linien aber, welche die verlängerten Schenkel zweyer Winkel ſind, die kleiner ſind, als zwey rechte, treffen (11. Grundſ.) zuſammen. Demnach treffen die verlängerten EB, FD an der Seite BD zuſammen. Man verlängere ſie alſo, und ſie treffen in dem Punkte G zuſammen, ſo ziehe man die AG.

Da nun die AC der CE gleich iſt, ſo iſt (1, 5. S.) auch der Winkel AEC dem Winkel EAC gleich; es iſt aber der Winhel bey C ein rechter; folglich iſt (1, 32. S.) jeder der beyden AEC, EAC die Hälfte eines rechten. Aus eben den Gründen aber iſt auch jeder der beyden CEB, EBC die Hälfte eines rechten; folglich iſt AEB ein rechter. Und da EBC die Hälfte eines rechten iſt, ſo iſt (1, 15. S.) auch DBG die Hälfte eines rechten; es iſt aber (1, 29. S.) auch der Winkel BDG ein rechter, denn er iſt dem Winkel DCE, als Wechſelwinkel gleich; folglich iſt auch der übrige Winkel DGB die Hälfte eines rechten, und mithin iſt der Winkel DGB dem Winkel DBG, alſo auch (1, 6. S.) die Seite DB der Seite DG gleich.

Da ferner der Winkel EGF die Hälfte eines rechten, aber der bey F ein rechter iſt, denn er iſt ſeinem Gegenwinkel bey C gleich; ſo iſt folglich auch der übrige Winkel FEG die Hälfte eines rechten, alſo auch der Winkel EGF dem Winkel FEG, und mithin auch (1, 6. S.) die Seite GF der Seite EF gleich.

Da nun die EC der CA gleich iſt, ſo iſt auch das Quadrat von EC dem Quadrate von CA gleich; und folglich ſind die Quadrate von EC, CA doppelt ſo groſs, als das Quadrat von CA. Den Quadraten von EC, CA aber iſt (1, 47. S.) das Quadrat von EA gleich; folglich iſt auch des Quadrat von EA doppelt ſo groſs, als das Quadrat von CA. Da ferner die GF der EF gleich iſt, ſo iſt auch das Quadrat von GF dem Quadrate von EF gleich; und mithin ſind die Quadrate von GF, FE dopppelt ſo groſs, als das Quadrat von EF. Den Quadraten von GF, FE aber iſt (1, 47. S.) das Quadrat von EG gleich; folglich iſt das Quadrat von EG doppelt ſo groſs, als das Quadrat von EF. Es iſt aber die EF der CD gleich; folglich iſt

ist auch das Quadrat von EG doppelt so grofs, als das Quadrat von CD. Es ist aber gezeigt worden, dafs auch das Quadrat von EA doppelt so grofs sey, als das Quadrat von AC; folglich sind die Qundrate von AE, EG doppelt so grofs, als die Quadrate von AC, CD. Den Quadraten von AE, EG aber ist (1, 47. S.) das Quadrat von AG gleich; folglich ist auch das Quadrat von AG doppelt so grofs, als die Quadrate von AC, CD. Dem Quadrate von AG aber sind (1, 47. S.) die Quadrate vou AD, DG gleich; folglich sind die Quadrate von AD, DG doppelt so grofs, als die Quadrate von AC, CD. Die DG aber ist der DB gleich; folglich sind die Quadrate von AD, DB doppelt so grofs, als die Quadrate von AC, CD.

Wenn demnach u. s w. w. z. e. w.

11. *Saz.*

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie so zu schneiden, dafs das Rechteck aus der ganzen Linie und einem der Abschnitte dem Quadrate des andern Abschnitts gleich sey.

Es sey die gegebene gerade Linie AB, und man soll sie so schneiden, dafs das Rechteck aus der ganzen Linie und einem der Abschnitte dem Quadrate des andern Abschnitts gleich sey.

Auflösung. Man beschreibe (1, 46. S.) von AB das Quadrat ABDC, halbire (1, 46. S.) die AC in dem Punkte E, und ziehe die BE; alsdann verlängere man die CA bis nach F, und mache (1, 3. S.) die FE der BE gleich; hierauf beschreibe man von AF das Quadrat FH, und verlängere die GH bis nach K, so behaupte ich, defs die gerade Linie AB in dem Punkte H so geschnitten sey, dafs das Rechteck aus AB, BH dem Quadrate von AH gleich sey.

Beweis. Da die gerade Linie AC in dem Punkce E halbirt, und ihr die AF angesezt worden ist, so ist (2, 6. S.) das Rechteck ans CF, FA sammt dem Quadrate von AE dem Quadrate von EF gleich. Es ist aber die EF der EB gleich; folglich ist auch das Rechteck aus CF, FA sammt dem Quadrate von AE dem Quadrate von EB gleich. Aber dem Qua-

Quadrate von EB sind (1, 47. S.) die Quadrate von BA, AE gleich, denn der Winkel bey A ist ein rechter; folglich ist das Rechteck aus CF, FA sammt dem Quadrate von AE den Quadraten von BA, AE gleich. Man nehme beyderseits das Quadrat von AE hinweg, so ist das übrigbleibende Rechteck aus CF, FA dem Quadrate von BA gleich. Nun ist FK das Rechteck aus CF, FA denn die AF ist der FG gleich, das Quadrat von AB aber ist AD; folglich ist das Parallelogramm FK dem Quadrate AD gleich. Man nehme beyderseits das Parallelogramm AK hinweg, so ist das übrigbleibende Parallelogramm FH dem Parallelogramme HD gleich. Es ist aber HD das Rechteck aus AB, BH, denn die AB ist der BD gleich, FH aber ist das Quadrat von AH; folglich ist das Rechteck aus AB, BH dem Quadrate von AH gleich; und mithin ist die gegebene gerade Linie AB in dem Punkte H so geschnitten worden, dass das Rechteck aus AB, BH dem Quadrate von AH gleich ist w. z. v. w.

12. *Saz.*

Lehrsaz. In den stumpfwinkeligen Dreyecken ist das Quadrat der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite grösser, als die Quadrate der ihn einschliessenden Seiten, um das doppelte Rechteck aus einer der einschliessenden Seiten, auf welche, nachdem sie verlängert worden, das Loth fällt, und der ausserhalb von dem Lothe an bis an den stumpfen Winkel eingeschlossenen Linie.

Es sey das stumpfwinkelige Dreyeck ABC, dessen stumpfer Winkel BAC, und man fälle von dem Punkte B auf die verlängerte CA das Loth BD, so behaupte ich, dass das Qua-

Quadrat von BC gröſſer ſey, als die Quadrate von BA, AC, um das doppelte Rechieck aus CA, AD.

Beweis. Da die gerade Linie CD in dem Punkte A nach Belieben geſchnitten iſt, ſo iſt (2, 4. S.) das Quadrat von CD den Quadraten von CA, AD und dem doppelten Rechtecke aus CA, AD gleich. Man ſeze beyderſeits das Quadrat von DB hinzu; ſo ſind die Quadrate von CD, BD den Quadraten von CA, AD, BD und dem doppelten Rechtecke aus CA, AD gleich. Den Quadraten von CD, DB aber iſt (1, 47. S.) das Quadrat von CB gleich, denn der Winkel bey D iſt ein rechter, den Quadraten von AD, DB hingegen iſt das Quadrat von AB gleich; folglich iſt das Quadrat von CB den Quadraten von CA, AB und dem doppelten Rechtecke aus CA, AD gleich; und mithin iſt das Quadrat von CB gröſſer, als die Quadrate von CA, AB um das doppelte Rechteck aus CA, AD.

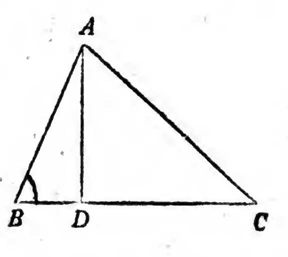
Demnach iſt u. ſ. w. w. z. e. w.

13. *Saz.*

Lehrſaz. In den ſpizwinkeligen Dreyecken iſt das Quadrat der dem ſpizen Winkel gegenüberliegenden Seite kleiner, als die Quadrate der ihn einſchlieſſenden Seiten, um das doppelte Recteck aus einer der einſchlieſſenden Seiten, auf welche das Loth fällt, und der innerhalb von dem Lothe an bis an den ſpizen Winkel eingeſchloſſenen Linie.

Es ſey das ſpizwinkelige Dreyeck ABC, deſſen ſpizer Winkel bey B, und man fälle von dem Punkte A auf die BC das Loth AD, ſo behaupte ich, daſs das Quadrat von AC kleiner ſey, als die Quadrate von CB, BA, um das doppelte Rechteck aus BC, BD.

Be-



Beweis. Da die gerade Linie CB nach Belieben in dem Punkte D geschnitten ist, so sind (2, 7. S.) die Quadrate von CB, BD dem doppelten Rechtecke aus CB, BD und dem Quadrate von DC gleich. Man seze beyderseits das Quadrat von AD hinzu, so sind die Quadrate von CB, BD, AD dem doppelten Rechtecke aus CB, BD, und den Quadraten von AD, DC gleich. Aber den Quadraten von BD, DA ist (1, 47. S.) das Quadrat von AB gleich, denn der Winkel bey D ist ein rechter; den Quadraten von AD, DC hingegen ist das Quadrat von AC gleich; folglich sind die Quadrate von CB, BA dem Quadrate von AC, und dem doppelten Rechtecke aus CB, BD gleich. Und mithin ist das Quadrat von AC allein kleiner, als die Quadrate von CB, BA, um das doppelte Rechteck aus BC, BD.

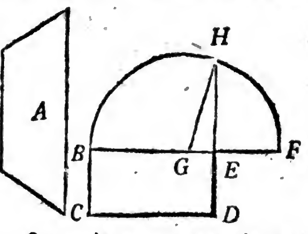
Demnach ist u. s. w. w. z. e. w.

14. *Saz.*

Aufgabe. Einer gegebenen geradlinigen Figur ein Quadrat gleich zu machen.

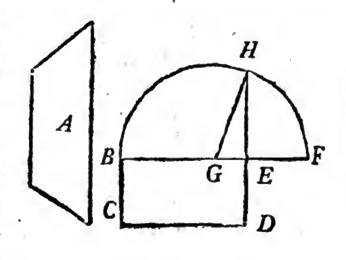
Es sey die gegebene geradlinige Figur A, und man soll derselbigen ein Quadrat gleich machen.

Auflösung. Man mache (1, 45. S.) der geradlinigen Figur A das Rechteck BD gleich; wenn nun die Seite BE der Seite ED gleich ist, so ist das verlangte geschehen, denn es ist ein der geradlinigen Figur gleiches Quadrat beschrieben worden. Wo aber nicht, so ist eine von beyden, die BE oder ED grösser, als die andere. Es sey die BE die grössere, so verlängere man sie bis



E nach

nach F und mache (1, 3. S.) die EF der ED gleich, alsdann halbîre man die FB in dem Punkte G, und beschreibe (3. Ford.) aus dem Mittelpunkte G, mit der Weite GF oder GB, den Halbkreis BHF, hierauf verlängere man die DE bis nach H, und ziehe die GH.



Beweis. Da die gerade Linie BF in dem Punkte G in gleiche und in dem Punkte E in ungleiche Theile getheilt ist, so ist (2, 5. S.) das Rechteck aus BE, EF sammt dem Quadrate von EG dem Qudrate von GF gleich. Die GF aber ist der GH gleich; folglich ist das Rechteck aus BE, EF, sammt dem Quadrate von GE dem Quadrate von GH gleich. Dem Quadrate von GH aber sind (1, 47. S.) die Quadrate von EH, GE gleich; folglich ist das Rechteck aus BE, EF sammt dem Quadrate von GE den Quadraten von HE, EG gleich. Man nehme beyderseits das Quadrat von GE hinweg, so ist das übrigbleibende Rechteck aus BE, EF dem Quadrate von EH gleich. Nun ist aber BD das Rechteck aus BE, EF, denn die EF ist der ED gleich; folglich ist das Parallelogramm BD dem Quadrate von EH gleich. Es ist aber BD der geradlinigen Figur A gleich; folglich ist auch die geradlinige Figur A dem Quadrate von EH gleich.

Demnach ist der gegebenen geradlinigen Figur A ein Quadrat gleich gemacht worden, dasjenige nämlich, welches von der Linie EH beschrieben werden kann, w. z. e. w.

Euklids

EUKLIDS ELEMENTE.

DRITTES BUCH.

Erklärungen.

1. *Gleiche* Kreiſe ſind ſolche, in welchen die Durchmeſſer, oder die vom Mittelpunkte ausgehende Linien (*Halbmeſſer*), einander gleich ſind.

2. Man ſagt, eine gerade Linie *berühre* den Kreis, wenn ſie den Kreis trifft, und verlängert ihn doch nicht ſchneidet. (Sie heiſst auch *Tangente* des Kreiſes.)

3. Man ſagt von Kreiſen, daſs ſie einander *berühren*, wenn ſie einander treffen, ohne einander zu ſchneiden.

4. Man ſagt gerade Linien ſtehen im Kreiſe *gleichweit vom Mittelpunkte ab*, wenn die vom Mittelpunkte aus auf ſie gefällten Lothe einander gleich ſind.

5. Von derjenigen aber, auf welche ein gröſſeres Loth fällt, ſagt man, ſie ſtehe *weiter* ab.

6. Ein *Kreisabſchnitt* (*Segment*) iſt die Figur, welche von einer geraden Linie und einem Theile des Umkreiſes (*Kreisbogen*) eingeſchloſſen wird.

7. Der *Winkel des Kreisabſchnitts* iſt der, welcher von eben dieſer geraden Linie und dem Kreisbogen eingeſchloſſen wird.

8. Der *Winkel im Kreisabſchnitte* iſt der, welcher von zwey geraden Linien eingeſchloſſen wird, die von einem im Kreisbogen nach Belieben angenommenen Punkte an die Endpunkte der geraden Linie gehen, welche die Grundlinie des Kreisabſchnitts iſt.

9. Da die einen ſolchen Winkel einſchlieſſenden Linien einen Kreisbogen abſchneiden, ſo ſagt man auch, dieſer Winkel *ſtehe auf ſolchem Kreisbogen.*

10. Ein *Kreisausſchnitt* (*Sector*) iſt die Figur, welche von den Schenkeln eines Winkels am Mittelpunkte des Kreiſes (*Centriwinkels*) und dem von ihnen abgeſchnittenen Kreisbogen eingeſchloſſen wird.

11. *Aehnliche* Kreisabſchnitte ſind ſolche, welche gleiche Winkel faſſen, oder in welchen die Winkel einander gleich ſind.

1. *Saz.*

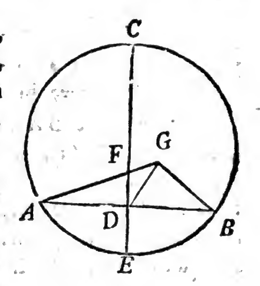
Aufgabe. Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreiſes zu finden.

Es ſey der gegebene Kreis ABC, und man ſoll deſſen Mittelpunkt finden.

Auflöſung. Man ziehe in demſelben eine gerade Linie AB nach Belieben, halbire ſie (1, 10. S.) in dem Punkte D, errichte (1, 11. S.) auf ihr in eben dieſem Punkte die DC lothrecht, und verlängere ſolche bis nach E; alsdann halbire man die CE in dem Punkte F, ſo behaupte ich, daſs F der Mittelpunkt des Kreiſes ABC ſey.

Beweis. Es ſey nicht der Punkt F, ſondern, die Möglichkeit angenommen, irgend ein anderer, wie der Punkt G, der Mittelpunkt, ſo ziehe man GA, GD, GB.

Da



Da nun die A D der D B gleich, und die G D gemeinschaftlich ist, so sind die beyden A D, D G den beyden G D, D B stückweise gleich, auch ist (1, 15. Erkl.) die Grundlinie G A der Grundlinie G B gleich, denn sie gehen beyde von dem Mittelpunkte G aus; folglich ist (1, 8. S.) auch der Winkel A D G dem Winkel G D B gleich. Wenn aber eine gerade Linie auf einer andern so aufgestellt ist, dass sie gleiche Nebenwinkel macht, so ist (1, 10. Erkl.) jeder der gleichen Winkel ein rechter. Es ist also G D B ein rechter Winkel. Aber auch F D B ist ein rechter; folglich ist der Winkel G D B dem Winkel F D B, also der kleinere dem grössern, gleich, welches unmöglich ist. Demnach ist der Punkt G nicht der Mittelpunkt des Kreises A B C. Eben so kann dies aber auch von jedem andern Punkte, ausser dem Punkte F gezeigt werden; folglich ist der Punkt F der Mittelpunkt des Kreises A B C. w. z. e. w.

Zusaz. Hieraus erhellet, dass, wenn im Kreise eine gerade Linie eine andere halbirt und lothrecht schneidet, in der schneidenden Linie der Mittelpunkt des Kreises sey.

2. *Saz.*

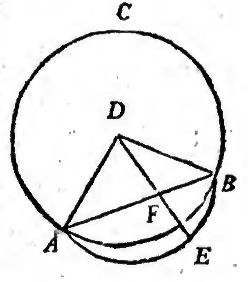
Lehrsaz. Wenn in der Peripherie eines Kreises zwey beliebige Punkte angenommen werden, so fällt die gerade Linie, welche solche verbindet, innerhalb des Kreises.

Es sey der Kreis A B C, und man nehme in der Peripherie desselben nach Belieben die beyden Punkte A, B an, so behaupte ich, dass die von A nach B gezogene gerade Linie innerhalb des Kreises falle.

Beweis. Wäre dies nicht, sondern fiele sie, die Möglichkeit angenommen, ausserhalb des Kreises, wie die A E B, so nehme man (3, 1. S.) den Mittelpunkt des Kreises

A B C;

ABC; dieser sey D. Nun ziehe man die DA, DB, DF, und verlängere die leztere bis nach E.



Da nun die DA der DB gleich ist, so ist auch (1, 5. S.) der Winkel DAE dem Winkel DBE gleich. Und da in dem Dreyecke DAE die eine Seite AE bis nach B verlängert worden ist, so ist (1, 16. S.) der Winkel DEB grösser, als der DAE. Es ist aber der Winkel DAE dem Winkel DBE gleich; folglich ist der Winkel DEB auch grösser, als der DBE. Nun liegt aber (1, 18. S.) dem grössern Winkel auch die grössere Seite gegenüber; folglich ist auch die DB grösser als die DE. Es ist aber die DB der DF gleich, und mithin ist die kleinere DF grösser, als die grössere DE, welches unmöglich ist. Folglich fällt die von A nach B gezogene gerade Linie nicht ausserhalb des Kreises. Eben so kann aber auch gezeigt werden, dass sie nicht in die Peripherie falle; folglich fällt sie innerhalb des Kreises,

Wenn demnach in der Peripherie eines u. s. w. w. z. e. w.

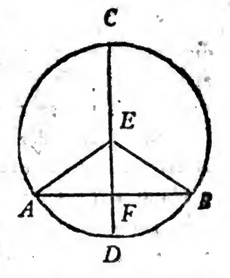
3. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn im Kreise eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie eine andere nicht durch den Mittelpunkt gehende halbirt, so schneidet sie dieselbe lothrecht; und wenn sie dieselbe lothrecht schneidet, so halbirt sie solche auch.

Es sey der Kreis ABC, und in demselben halbire die durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie CD eine nicht durch den Mittelpunkt gehende AB in dem Punkte F, so behaupte ich, dass sie dieselbe auch lothrecht schneide.

Beweis. Man nehme (3, 1. S.) den Mittelpunkt des Kreises ABC, und dieser sey E, nun ziehe man die EA, EB.

Da nun die AF der FB gleich und die FE gemeinschaftlich ist, so sind zwey und zwey Seiten einander stückweise



weise gleich, und da auch die Grundlinie EA der Grundlinie EB gleich ist, so ist (1, 8. S.) auch der Winkel AFE dem Winkel EFB gleich. Wenn aber eine gerade Linie auf einer andern so aufgestellt ist, dass sie die Nebenwinkel einander gleich macht, so ist jeder der gleichen Winkel ein rechter; folglich ist jeder der Winkel AFE, EFB ein rechter, und mithin schneidet die durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie CD, welche die nicht durch den Mittelpunkt gehende AB halbirt, solche auch lothrecht.

Nun seze man aber, die CD schneide die AB lothrecht, so behaupte ich, dass sie solche auch halbire, dass ist, dass die AF der FB gleich sey.

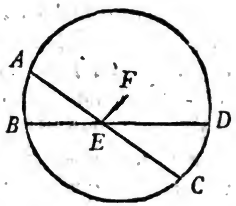
Denn da, nach der nämlichen Construction, die EA, EB, als Halbmesser, einander gleich sind, so ist (1, 5. S.) auch der Winkel EAF dem Winkel EBF gleich; es ist aber AFE ein rechter Winkel, und dem rechten Winkel EFB gleich; folglich sind in diesen beyden Dreyecken zwey Winkel einander stückweise gleich, auch ist eine Seite des einen einer Seite des andern gleich, nämlich die beyden gemeinschaftliche, und in beyden einem der gleichen Winkel gegenüberliegenden Seite EF; folglich sind (1, 26. S.) in beyden auch die übrigen Seiten einander gleich; die AF also ist der FB gleich.

Wenn demnach im Kreise eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie u. s. w. w. z. e. w.

4. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn im Kreise zwey nicht durch den Mittelpunkt gehende gerade Linien einander schneiden, so halbiren sie einander nicht.

Es sey der Kreis ABCD, in demselben schneiden die nicht durch den Mittelpunkt gehenden geraden Linien AC, BD einander in dem Punkte E, so behaupte ich, dass sie einander nicht halbiren. Be-



Beweis. Gesezt, sie halbirten, die Möglichkeit angenommen, einander, so, dass die AE der EC, und die BE der ED gleich wäre, so nehme man den Mittelpunkt des Kreises ABCD, und dieser sey F, alsdann ziehe man die FE.

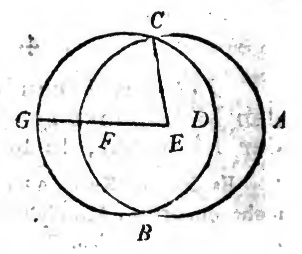
Da nun die durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie FE die nicht durch den Mittelpunkt gehende AC halbirt, so schneidet sie (3, 3 S.) dieselbige auch lothrecht; und es ist also der Winkel FEA ein rechter Winkel. Da ferner die gerade Linie FE die nicht durch den Mittelpunkt gehende Linie BD halbirt, so schneidet sie solche auch lothrecht, und es ist also auch der Winkel FEB ein rechter Winkel. Es ist aber gezeigt worden, dass auch FEA ein rechter Winkel sey; folglich ist der Winkel FEA dem Winkel FEB, also der kleinere dem grösseren, gleich; welches unmöglich ist. Die AC, BD halbiren also einander nicht.

Wenn demnach im Kreise u. s. w. w. z. e. w.

5. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey Kreise einander schneiden, so haben sie nicht einerley Mittelpunkt.

Die beyden Kreise ABC, CDG schneiden einander in den Punkten B, C so behaupte ich, dass sie nicht einerley Mittelpunkt haben.



Beweis. Es sey, die Möglichkeit angenommen, ihr gemeinschaftlicher Mittelpunkt E, so ziehe man die EC, und nach Belieben die EFG.

Da nun E der Mittelpunkt des Kreises ABC ist, so ist (1, 15. Erkl.) die EC der EF gleich. Da ferner E auch der

Mit-

Mittelpunkt des Kreises CDG ist, so ist die EC der EG gleich. Es ist aber gezeigt worden, dafs die EC auch der EF gleich sey; folglich ist die EF der EG, also die kleinere der grösseren, gleich, welches unmöglich ist. Der Punkt E ist also nicht der Mittelpunkt der beyden Kreise ABC, CDG.

Wenn demnach zwey Kreise u. s. w. w. z. e. w.

6. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey Kreise einander inwendig berühren, so haben sie nicht einerley Mittelpunkt.

Die beyden Kreise ABC, CDE berühren einander inwendig in dem Punkte C, so behaupte ich, dafs sie nicht einerley Mittelpunkt haben.

Beweis. Es sey, die Möglichkeit angenommen, F ihr gemeinschaftlicher Mittelpunkt, so ziehe man die FC, und nach Belieben die FEB.

Da nun F der Mittelpunkt des Kreises ABC ist, so ist die FC der FB gleich. Da ferner F der Mittelpunkt des Kreises CDE ist, so ist die FC der FE gleich. Es ist aber gezeigt worden, dafs die FC auch der FB gleich sey; folglich ist die FE der FB, also die kleinere der grösseren, gleich, welches unmöglich ist. Es ist also nicht der Punkt F der Mittelpunkt der beyden Kreise ABC, CDE.

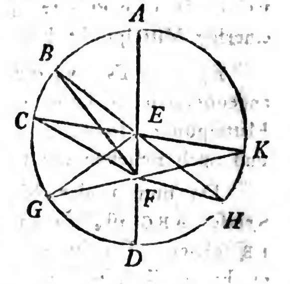
Wenn demnach zwey Kreise u. s. w. w. z. e. w.

7. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn man im Durchmesser eines Kreises einen Punkt annimmt, der nicht der Mittelpunkt ist, und es gehen von diesem Punkte aus gerade Linien an den Kreis, so ist die gröfste von ihnen diejenige, in welcher der Mit-

Mittelpunkt liegt, ihr Reſt aber die kleinſte; und von den übrigen iſt immer die, welche der durch den Mittelpunkt gehenden näher liegt, gröſſer als die entferntere; auch gehen von dieſem Punkte aus nur zwey gleiche gerade Linien auf beyden Seiten der kleinſten an den Kreis.

Es ſey der Kreis ABCD, deſſen Durchmeſſer AD, und auf demſelben nehme man den Punkt F an, der nicht der Mittelpunkt des Kreiſes iſt, deſſen Mittelpunkt aber ſey E, und von dem Punkte F aus gehen die geraden Linien FB, FC, FG an den Kreis, ſo behaupte ich, daſs die FA die gröſste, die FD hingegen die kleinſte, von den übrigen aber die FB gröſſer, als die FC, und die FC gröſſer, als die FG ſey. Man ziehe noch die BE, CE, GE.



Beweis. Da (1, 20. S.) in jedem Dreyecke jede zwey Seiten zuſammen gröſſer, als die dritte, ſind, ſo ſind die EB, EF gröſſer, als die BF. Es iſt aber die AE der BE gleich; folglich ſind die BE, EF der AF gleich, und mithin iſt die AF gröſſer, als die BF. Da ferner die BE der CE gleich, die FE aber gemeinſchaftlich iſt, ſo ſind die beyden BE, FE den beyden CE, FE ſtückweiſe gleich, aber der Winkel BEF iſt gröſſer, als der Winkel CEF; folglich iſt (1, 24. S.) auch die Grundlinie BF gröſſer, als die Grundlinie CF. Aus eben den Gründen iſt auch die CF gröſſer, als die GF.

Da ferner die GF, FE gröſſer ſind, als die GE, aber die GE der ED gleich iſt, ſo ſind die GF, FE auch gröſſer, als die ED. Man nehme beyderſeits die FE hinweg, ſo iſt der Reſt FG gröſſer, als der Reſt FD. Und folglich iſt FA die gröſste, und FD die kleinſte, auch FB gröſſer, als FC, und FC gröſſer, als FG,

Ich behaupte aber ferner, daſs von dem Punkte F nur zwey gleiche gerade Linien, auf beyden Seiten der kleinſten FD, an den Kreis ABCD gehen.

Man

Man seze (1, 23. S.) an den Punkt E der Linie EF den Winkel FEH, welcher dem Winkel GEF gleich sey, und ziehe die FH. Da nun die GE der EH gleich, und die EF gemeinschaftlich ist, so sind die beyden GE, EF den beyden EH, EF stückweise gleich, auch ist der Winkel GEF dem Winkel HEF gleich; folglich ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie FG der Grundlinie FH gleich. Nun behaupte ich, dafs von dem Punkte F aus keine andere, der FG gleiche, gerade Linie an den Kreis gehe. Denn gesezt, es gehe, die Möglichkeit angenommen, noch die Linie FK, welche der FG gleich sey, an den Kreis, so ist, da die FK der FG, die FG aber der FH gleich ist, auch die FK der FH, also die, der durch den Mittelpunkt gehenden, nähere der entfernteren gleich, welches unmöglich ist.

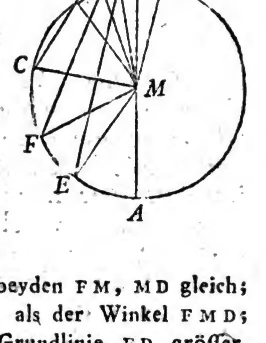
Wenn man demnach im Durchmesser eines Kreises u. s. w. w. z. e. w.

8. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn ausserhalb eines Kreises ein Punkt angenommen wird, und von demselben gerade Linien an den Kreis gehen, wovon eine durch den Mittelpunkt gehet, die übrigen aber nach Belieben ihn treffen, so ist unter denen, welche an die hohle Peripherie gehen, diejenige die gröfste, welche durch den Mittelpunkt gehet, und von den übrigen jede der durch den Mittelpunkt gehenden nähere gröfser, als die enferntere; unter denen aber, welche an die erhabene Peripherie gehen, ist die zwischen dem angenommenen Punkte und dem Durchmesser liegende die kleinste, und von den übrigen jede der kleinsten nähere kleiner, als die entferntere; auch gehen von dem angenommenen Punkte aus nur zwey gleiche gerade Linien auf beyden Seiten der kleinsten an den Kreis.

Es sey der Kreis ABC; man nehme ausserhalb desselben einen Punkt D an, und ziehe von demselben an den Kreis

Kreis die geraden Linien DA, DE, DF, DC, unter welchen die DA durch den Mittelpunkt gehe, so behaupte ich, daſs unter den an die hohle Peripherie AEFC gehenden geraden Linien die durch den Mittelpunkt gehende DA die gröſste, und die zwischen dem angenommenen Punkte und dem Durchmesser AG befindliche, DG, die kleinste, daſs aber die DE gröſser, als die DF, und die DF gröſser, als die DC sey; daſs ferner unter denen, welche in den Punkten H, L, K, G die erhabene Peripherie treffen, immer die der kleinsten DG nähere kleiner sey, als die entferntere, nämlich die DK kleiner, als die DL, und die DL kleiner, als die DH.



Beweis. Man nehme den Mittelpunkt des Kreises ABC, und dieser sey M, alsdann ziehe man die ME, MF, MC, MH, ML, MK.

Da nun die AM der EM gleich ist, so seze man beyderseits die MD hinzu, und es ist die AD den beyden EM, MD gleich. Aber die EM, MD sind (1, 20. S.) gröſser, als die ED; folglich ist auch die AD gröſser, als die ED. Da ferner die ME der MF gleich, die MD aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden EM, MD den beyden FM, MD gleich; aber der Winkel EMD ist gröſser, als der Winkel FMD; folglich ist (1, 24. S.) auch die Grundlinie ED gröſser, als die Grundlinie FD. Eben so kann nun auch bewiesen werden, daſs die FD gröſser, als die CD, sey. Demnach ist DA die gröſste, und DE gröſser, als DF, die DF aber gröſser als die DC.

Da ferner (1, 20. S.) die MK, KD gröſser sind, als die MD, aber die MG der MK gleich ist, so ist auch der Rest KD gröſser, als der Rest GD, und mithin GD kleiner, als KD, folglich GD die kleinste. Und da in dem Dreyecke MLD auf einer seiner Seiten MD zwey gerade Linien MK, KD inwendig aufgestellt sind, so sind diese (1, 21. S.) kleiner

ner als ML, LD. Da nun die MK der ML gleich ist, so ist der Rest DK kleiner, als der Rest DL. Eben so kann nun auch bewiesen werden, dass DL kleiner sey, als DH. Demnach ist DG die kleinste, und DK kleiner als DL, die DL aber kleiner als die DH.

Ich behaupte endlich noch, dass von dem Punkte D aus nur zwey gleiche gerade Linien, auf beyden Seiten der kleinsten DG, an den Kreis gehen. Man seze (1, 23. S.) an den Punkt M der geraden Linie MD einen Winkel DMB welcher dem Winkel KMD gleich sey, und ziehe die DB. Da nun die MK der MB gleich, die MD aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden KM, MD den beyden BM, MD stückweise gleich, auch ist der Winkel KMD dem Winkel DMB gleich; folglich ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie DK der Grundlinie DB gleich. Nun behaupte ich, dass von dem Punkte D aus keine andere, der DK gleiche, gerade Linie an den Kreis gehe. Es gehe, die Möglichkeit angenommen, noch eine andere; der DK gleiche, an den Kreis wie die DN. Da nun die DK der DN, aber auch die DK der DB gleich ist, so ist auch die DB der DN, also die der kleinsten DG nähere der enferntеren, gleich, welches, nach dem bereits erwiesenen, unmöglich ist.

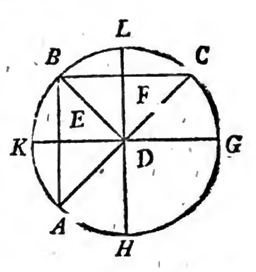
Wenn demnach ausserhalb eines Kreises u. s. w. w. z. e. w.

9. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn in einem Kreise ein Punkt angenommen wird, und von demselben mehr, als zwey, gleiche gerade Linien an den Kreis gehen, so ist der angenommene Punkt der Mittelpunkt des Kreises.

Es sey der Kreis ABC, und in demselben der Punkt D, und von diesem Punkte D gehen an den Kreis ABC mehr, als zwey, gleiche gerade Linien DA, DB, DC, so behaupte ich, dass der Punkt D der Mittelpunkt des Kreises sey.

Beweis. Man ziehe die AB, BC und halbire sie (1, 10. S.) in den Punkten E, F, ziehe alsdann die ED, DF und ver-



verlängere sie bis zu den Punkten G, K und H, L.

Da nun die AE der EB gleich, die ED aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden AE, ED den beyden BE, ED stückweise gleich, auch ist die Grundlinie DA der Grundlinie DB gleich; folglich ist (1, 8. S.) auch der Winkel AED jedem Winkel BED gleich, und mithin ist (1, 10. Erkl.) jeder der beyden Winkel AED, BED ein rechter, und die Linie GK, welche die AB halbirt, schneidet sie also lothrecht. Da nun wenn im Kreise eine gerade Linie eine andre halbirt und lothrecht schneidet (3, 1. Zus.) in der schneidenden Linie der Mittelpunkt des Kreises ist, so ist in der Linie GK der Mittelpunkt des Kreises ABC. Nun wird eben so bewiesen, dass auch in der HL der Mittelpunkt des Kreises ABC sey. Da nun die beyden Linien GK, HL keinen andern Punkt mit einander gemein haben, als den Punkt D, so ist folglich D der Mittelpunkt des Kreises ABC.

Wenn demnach in einem Kreise ein Punkt angenommen wird u. s. w. w. z. e. w.

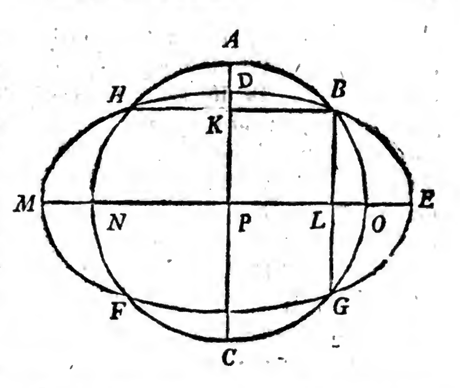
10. *Saz.*

Lehrsaz. Ein Kreis schneidet einen andern nicht in mehr als zwey Punkten.

Gesezt, es schnitte, die Möglichkeit angenommen, der Kreis ABC den Kreis DEF in mehr, als zwey, Punkten, nämlich in B, G, H, so ziehe man die geraden Linien BH, BG, und halbire sie in den Punkten K, L alsdann errichte man in diesen Punkten K, L auf den Linien BH, BG die KC, LM lothrecht, und verlängere solche bis nach A, E.

Beweis. Da in dem Kreise ABC die gerade Linie AC eine andere BH halbirt und lothrecht schneidet, so ist (3, 1. Zus.) in der Linie AC der Mittelpunkt des Kreises ABC. Da ferner in eben diesem Kreise die gerade Linie NO eine andere BG halbirt und lothrecht schneidet, so ist der Mittelpunkt

punkt des Kreises ABC in der Linie NO. Es ist aber gezeigt worden, daſs er auch in der Linie AC liege, und die geraden Linien AC, NO begegnen einander in keinem Punkte, als im Punkte P, folglich ist der Punkt P der Mittelpunkt des Kreises ABC. Eben so kann aber gezeigt werden, daſs der Punkt P, auch der Mittelpunkt des Kreises DEF sey, und folglich hätten die beyden einander schneidenden Kreise ABC, DEF einerley Mittelpunkt P, welches (3, 5. S.) unmöglich ist.



Ein Kreis schneidet also einen andern nicht in mehr, als zwey, Punkten, w. z. e. w.

11. *Saz.*

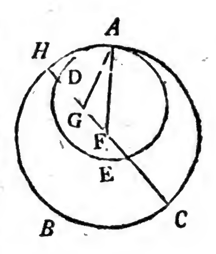
Lehrsaz. Wenn zwey Kreise einander inwendig berühren, und man nimmt ihre Mittelpunkte, so trifft die gerade Linie, welche durch ihre Mittelpunkte gehet, verlängert an den Berührungspunkt der beyden Kreise.

Die beyden Kreise ABC, ADE berühren einander inwendig in dem Punkte A, und man nehme des Kreises ABC Mittelpunkt F, und des Kreises ADE Mittelpunkt G, so behaupte ich, daſs die von F nach G gezogene gerade Linie verlängert an den Punkt A treffe.

Beweis. Wenn dies nicht wäre, so habe sie, die Möglichkeit angenommen, die Lage FGDH, und man ziehe die AF, AG. Da nun die AG, GF (1, 20. S.) zusammen gröſser sind, als die FA, das ist gröſser, als FH, (denn FH, FA sind als Halbmesser, einander gleich) so nehme

man

man beyderseits die FG hinweg, und es ist der Rest AC noch grösser, als der Rest GH. Es ist aber die AG der GD gleich; und folglich wäre auch GD, die kleinere, grösser, als GH, die grössere, welches unmöglich ist. Folglich fällt die von F nach G gezogene gerade Linie nicht ausserhalb des Berührungspunkt A, und trifft mithin ihn selbst.



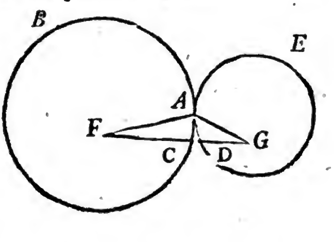
Wenn demnach zwey Kreise einander inwendig berühren u. s. w. w. z. e. w.

12. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey Kreise einander auswendig berühren, so gehet die durch ihre Mittelpunkte gezogene gerade Linie durch den Berührungspunkt.

Die beyden Kreise ABC, ADE berühren einander auswendig in dem Punkte A, und man nehme des Kreises ABC Mittelpunkt F, und des Kreises ADE Mittelpunkt G, so behaupte ich, dass die von F nach G gezogene gerade Linie durch den Berührungspunkt A gehe.

Beweis. Wenn dies nicht wäre, so habe sie, die Möglichkeit angenommen, die Lage FCDG, und man ziehe die AF, AG. Da nun F der Mittelpunkt des Kreises ABC ist, so ist die FA der FC gleich; Da ferner G der Mittelpunkt des Kreises ADE ist, so ist die GA der GD gleich, Nun ist aber gezeigt worden, dass die FA auch der FC gleich sey; folglich sind die beyden FA, AG den beyden FC, DG gleich, und mithin ist die ganze FG grösser, als die beyden FA, AG. Aber sie ist (1, 20. S.) auch kleiner, als



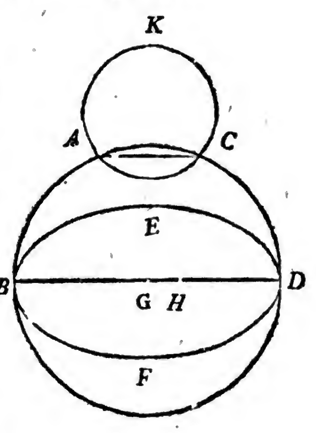
als diese, welches unmöglich ist. Folglich fällt die von dem Punkte F nach G gezogene gerade Linie nicht ausserhalb des Berührungspunkts A, und gehet also durch denselben.

Wenn demnach zwey Kreise einander auswendig berühren u. s. w. w. z. e. w.

13. *Saz.*

Lehrsaz. Ein Kreis berührt einen andern, er mag ihn inwendig oder auswendig berühren, nicht in mehr als *einem* Punkte.

Beweis. Gesezt, der Kreis ABCD berühre, die Möglichkeit angenommen, den Kreis EBFD zuerst inwendig in mehr als *einem* Punkte, nämlich in den Punkten B, D so nehme man (3, 1. S.) des Kreises ABDC Mittelpunkt G, und des Kreises EBFD Mittelpunkt H, und die gerade Linie von G nach H wird (3, 11. S.) durch die Punkte B, D gehen. Gesezt sie habe die Lage BGHD. Da nun G der Mittelpunkt des Kreises ABCD ist, so ist die BG der GD gleich, und folglich die BG grösser, als die HD, also noch vielmehr die BH grösser, als die HD. Da ferner H der Mittelpunkt des Kreises EBFD ist, so ist die BH der HD gleich; es ist aber gezeigt worden, dass die BH auch viel grösser, als die HD, sey, welches unmöglich ist. Ein Kreis berührt also einen andern inwendig nicht in mehr als *einem* Punkte.



Ich behaupte aber ferner, dass ein Kreis einen andern auch auswendig nicht in mehr als *einem* Punkte berühre.

Denn gesezt, der Kreis ACK berühre, die Möglichkeit angenommen, den Kreis ABDC auswendig in mehr als *einem* Punkte, nämlich in den Punkten A, C so ziehe man die AC. Da nun in der Peripherie eines jeden der Kreise ABDC, ACK zwey beliebige Punkte A, C angenommen worden, so fällt die durch dieselbigen gezogene gerade Linie (3, 2. S.) innerhalb eines jeden der beyden Kreise. Fällt sie aber innerhalb des Kreises ABDC, so fällt sie (3, 3. Erkl.) ausserhalb des Kreises ACK, welches unmöglich ist. Folglich berührt ein Kreis einen andern auswendig nicht in mehr als *einem* Punkte.

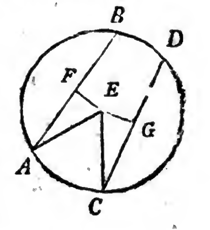
Es ist aber gezeigt worden, daſs die Berührung zweyer Kreise auch inwendig nicht in mehr als *einem* Punkte geschehe.

Demnach berührt ein Kreis einen andern, er mag ihn inwendig oder auswendig berühren, nicht in mehr als *einem* Punkte, w. z. e. w.

14. *Saz.*

Lehrsaz. Im Kreise stehen gleiche gerade Linien gleich weit vom Mittelpunkte ab; und, gerade Linien welche gleich weit vom Mittelpunkte abstehen sind einander gleich.

Es sey der Kreis ABDC, und in demselben seyen die geraden Linien AB, CD einander gleich, so behaupte ich, daſs sie gleich weit vom Mittelpunkte abstehen.



Beweis. Man nehme des Kreises ABDC Mittelpunkt E, fälle von dem Punkte E auf die Linien AB, CD die Lothe EF, EG, und ziehe AE, EC.

Da nun die durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie EF die nicht durch den Mittelpunkt gehende AB lothrecht schneidet, so halbirt sie (3, 3. S.) solche auch; es ist also die AF der FB gleich, und mithin AB das Doppelte von AF. Aus eben den Gründen aber ist CD das Doppelte von CG; ferner ist die AB der

der CD, und folglich auch die AF der CG gleich; und da die AE der EC gleich ist, so ist auch das Quadrat von AE dem Quadrate von EC gleich. Nun sind aber (1, 47. S.) dem Quadrate von AE die Quadrate von AF, FE gleich, denn der Winkel bey F ist ein rechter, dem Quadrate von EC aber sind die Quadrate von CG, GE gleich, denn der Winkel bey G ist ein rechter; folglich sind die Quadrate von AF, EF den Quadraten von CG, GE gleich. Unter diesen aber ist das Quadrat von AF dem Quadrate von CG gleich, weil die AF selbst der CG gleich ist; folglich ist auch, wenn man beyderseits gleiches wegnimmt, das Quadrat von FE dem Quadrate von GE, und mithin auch die FE der EG gleich. Man sagt aber (3, 4. Erkl.) dass gerade Linien im Kreise gleich weit vom Mittelpunkte abstehen, wenn die vom Mittelpunkte aus auf sie gefällten Lothe gleich sind; und folglich stehen AB, CD gleichweit vom Mittelpunkte ab.

Nun sollen aber AB, CD gleichweit vom Mittelpunkte abstehen, das ist, es soll die EF der EG gleich seyn, so behaupte ich, dass auch die AB der CD gleich sey.

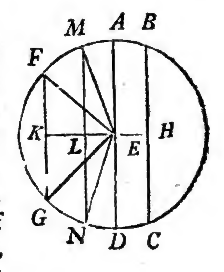
Denn man kann, nach der nämlichen Construction eben so, wie vorhin, zeigen, dass AB das Doppelte von AF, und CD das Doppelte von CG sey. Da nun die AE der CE gleich ist, so ist auch das Quadrat von AE dem Quadrate von CE gleich. Nun sind (1, 47. S.) dem Quadrate von AE die Quadrate von EF, FA, dem Quadrate von CE aber die Quadrate von GE, CG gleich; folglich sind die Quadrate von EF, FA den Quadraten von GE, CG gleich. Unter diesen aber ist das Quadrat von EF dem Quadrate von EG gleich, denn die EF selbst ist der EG gleich; folglich ist auch, wenn man beyderseits gleiches abziehet, das Quadrat von FA dem Quadrate von CG und mithin auch die AF selbst der GC gleich. Nun ist AB das Doppelte von AF, und CD das Doppelte von CG; folglich ist auch die AB der CD gleich.

Demnach stehen im Kreise u. s. w. w. z. e. w.

15. Saz.

Lehrsaz. Im Kreise ist der Durchmesser die grösste Linie, von den übrigen aber jede dem Mittelpunkte nähere grösser, als die entferntere.

Es sey der Kreis ABCD dessen Durchmesser AD, und sein Mittelpunkt E, ferner sey die BC dem Mittelpunkte E näher, die FG aber weiter von ihm entfernt, so behaupte ich, dass die AD die grösste, die BC aber grösser, als die FG, sey.



Beweis. Man fälle aus dem Mittelpunkte E auf die Linien BC, FG die Lothe EH, EK, so ist, da die BC dem Mittelpunkte näher, die FG aber von ihm entfernter ist, (3, 5. Erkl.) die EK grösser, als die EH. Man mache also die EL der EH gleich, verlängere die in dem Punkte L auf der EK lothrecht aufgerichtete ML bis nach N, und ziehe EM, EN und EF, EG.

Da nun die EH der EL gleich ist, so ist (3, 14. S.) auch die BC der MN gleich. Da ferner die AE der EM, und die ED der EN gleich ist, so ist die AD den beyden EM, EN gleich. Aber EM, EN sind zusammen grösser, als MN; folglich ist auch die AD grösser, als die MN. Es ist aber die MN der BC gleich; mithin ist auch die AD grösser, als die BC. Da nun die beyden ME, EN den beyden FE, EG gleich sind, aber der Winkel MEN grösser ist, als der Winkel FEG, so ist (1, 24. S.) auch die Grundlinie MN grösser, als die Grundlinie FG. Es ist aber gezeigt worden, dass die MN der BC gleich sey; folglich ist auch die BC grösser, als die FG. Mithin ist der Durchmesser AD die grösste, die BC aber grösser, als die FG.

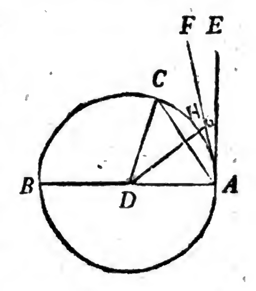
Demnach ist im Kreise der Durchmesser u. s. w. w. z. e. w.

16. Saz.

16. *Saz.*

Lehrsaz. Ein auf dem Durchmesser eines Kreises in dessen Endpunkte aufgerichtetes Loth fällt ausserhalb des Kreises, und zwischen das Loth und die Peripherie fällt keine andere gerade Linie; auch ist der Winkel des Halbkreises grösser, sein Rest aber kleiner, als jeder geradlinige spize Winkel.

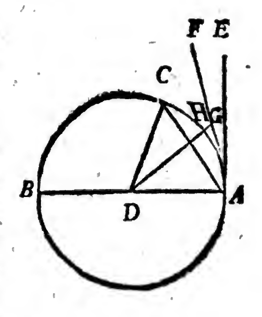
Es sey der Kreis ABC, um den Mittelpunkt D, und den Durchmesser AB, so behaupte ich, dass das im Endpunkte A des Durchmessers AB auf demselben errichtete Loth ausserhalb des Kreises falle.



Beweis. Gesezt, dieses wäre nicht, sondern es fiele, die Möglichkeit angenommen, innerhalb des Kreises, wie die AC, so ziehe man die DC.

Da nun die DA der DC gleich ist, so ist (1, 5. S.) auch der Winkel DAC dem Winkel ACD gleich. Es ist aber DAC ein rechter Winkel; folglich ist auch ACD ein rechter, und mithin sind DAC, ACD zusammen zwey rechte Winkel, welches (1, 17. S.) unmöglich ist; folglich fällt das in dem Punkte A auf BA errichtete Loth nicht innerhalb des Kreises. Es kann aber eben so gezeigt werden, dass es auch nicht in die Peripherie falle; folglich fällt es ausserhalb desselben wie AE.

Nun behaupte ich ferner, dass zwischen das Loth AE und den Kreisbogen keine andere gerade Linie falle. Denn gesezt, es fiele, die Möglichkeit angenommen, noch eine andere dazwischen, wie die FA, so fälle man von dem Punkte D auf die FA das Loth DG. Da nun AGD ein rechter Winkel, aber DAG kleiner, als ein rechter ist, so ist (1, 19. S.) auch AD grösser, als DG. Es ist aber die DA der DH gleich, und mithin ist auch DH, die kleinere, grösser, als DG, die grössere, welches unmög-



möglich ist: folglich fällt zwischen das Loth und den Kreisbogen keine andere gerade Linie.

Endlich behaupte ich noch, dass der Winkel des Halbkreises, welcher vom Durchmesser BA, und dem Bogen CHA eingeschlossen wird, grösser, sein Rest aber, der vom Bogen CHA und dem Lothe AE eingeschlossen wird, kleiner sey, als jeder geradlinige spize Winkel.

Denn wenn es einen geradlinigen Winkel gäbe, der grösser wäre, als derjenige, welcher von dem Durchmesser BA und dem Bogen CHA, aber kleiner, als derjenige, welcher von dem Bogen CHA und dem Lothe AE eingeschlossen wird, so fiele zwischen den Bogen CHA und das Loth AE eine gerade Linie, welche einen Winkel machte, der, da er von geraden Linien eingeschlossen wird, grösser, als der vom Durchmesser BA und dem Bogen CHA, aber kleiner, als der vom Bogen CHA und dem Lothe AE eingeschlossene Winkel, wäre. Nun fällt aber eine solche Linie nicht zwischen den Bogen und das Loth; folglich giebt es auch keinen, von geraden Linien eingeschlossenen, Winkel, der grösser, als der vom Durchmesser BA und Kreisbogen CHA, aber kleiner, als der vom Bogen CHA und dem Lothe AE eingeschlossene Winkel, wäre.

Demnach fällt ein auf dem Durchmesser eines Kreises u. s. w. w. z. e. w.

Zusaz. Hieraus erhellet also, dass ein auf dem Durchmesser in dessen Endpunkte errichtetes Loth, den Kreis berühre, und dass eine gerade Linie den Kreis nur in *einem* Punkte berühre, indem (3, 2. S.) von einer geraden Linie, welche demselben in zwey Punkten begegnet, gezeigt worden ist, dass sie innerhalb desselben falle.

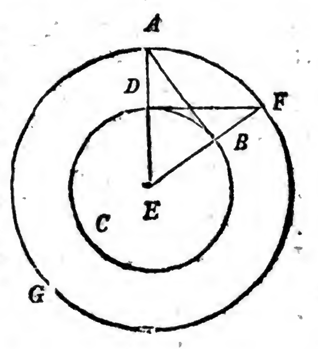
17. *Saz.*

17. *Saz.*

Aufgabe. Von einem gegebenen Punkte aus eine gerade Linie zu ziehen, die einen gegebenen Kreis berühre.

Es sey der gegebene Punkt A, der gegebene Kreis BCD, und man soll von dem Punkte A aus eine gerade Linie ziehen, welche den Kreis BCD berühre.

Auflösung. Man nehme des Kreises Mittelpunkt E, und ziehe die AE, alsdann beschreibe man (3. Ford.) aus dem Mittelpunkte E mit der Weite EA den Kreis AFG, errichte (1, 11. S.) in dem Punkte D auf der AE die DF lothrecht, und ziehe die EBF, AB, so behaupte ich, dass die von dem Punkte A aus gezogene Linie AB den Kreis BCD berühre.



Beweis. Da E der Mittelpunkt der beyden Kreise BCD, AFG ist, so ist die EA der EF, und die ED der EB gleich; und mithin sind die beyden AE, EB den beyden FE, ED gleich, auch schliessen sie bey E einen gemeinschaftlichen Winkel ein; folglich ist (1, 4. S) auch die Grundlinie DF der Grundlinie AB, und das ganze Dreyeck DEF dem ganzen Dreyecke ABE gleich, auch sind die übrigen Winkel in beyden Dreyecken einander gleich; folglich ist der Winkel EBA dem Winkel EDF gleich; es ist aber EDF ein rechter Winkel, mithin ist auch EBA ein rechter. Nun ist EB ein Halbmesser, und ein auf dem Durchmesser in dessen Endpunkte errichtetes Loth berührt (3, 16. Zus.) den Kreis; folglich berührt die AB den Kreis.

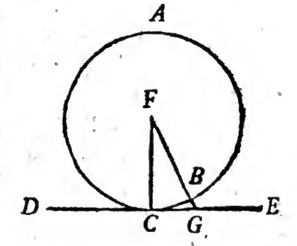
Demnach ist von dem gegebenen Punkte A aus die gerade Linie AB gezogen worden, welche den gegebenen Kreis BCD berührt, w. z. v. w.

18. *Saz.*

18. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn eine gerade Linie den Kreis berührt, und es wird von dem Mittelpunkte aus an den Berührungspunkt eine gerade Linie gezogen, ſo ſtehet dieſe auf der Tangente lothrecht.

Die gerade Linie DE berühre den Kreis ABC in dem Pnnkte C, und man nehme des Kreiſes ABC Mittelpunkt F, und ziehe von F nach C die Linie FC, ſo behaupte ich, daſs die FC auf der DE lothrecht ſey.



Beweis. Wenn dies nicht wäre, ſo fälle man (1, 12. S.) von dem Punkte F auf die DE das Loth FG. Da nun der Winkel FGC ein rechter iſt, ſo iſt (1, 17. S.) GCF ein ſpizer. Nun liegt (1, 19. S.) dem gröſſeren Winkel auch die gröſſere Seite gegenüber; es iſt alſo die FC gröſſer, als die FG. Die FC aber iſt der FB gleich; folglich iſt auch FB, die kleinere, gröſſer, als FG, die gröſſere, welches unmöglich iſt. Es iſt alſo nicht die FG lothrecht auf der DE. Eben ſo kann dies aber auch von jeder andern, auſſer der FC, gezeigt werden; folglich iſt die FC lothrecht auf der DE.

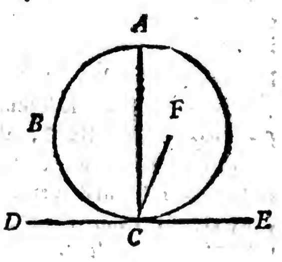
Wenn demnach eine gerade Linie den Kreis berührt, u. ſ. w. w. z. e. w.

19. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn eine gerade Linie den Kreis berührt, und man errichtet eine gerade Linie in dem Berührungspunkte auf der Tangente lothrecht, ſo iſt in dieſer des Kreiſes Mittelpunkt.

Die Linie DE berühre den Kreis ABC in dem Punkte C, und in eben dieſem Punkte C ſey die CA lothrecht auf

auf der DE aufgerichtet, so behaupte ich, dass in der Linie AC des Kreises Mittelpunkt sey.



Beweis. Wenn dies nicht wäre, so sey, die Möglichkeit angenommen, des Kreises Mittelpunkt F, und man ziehe die FC. Da nun die DE den Kreis ABC berührt, und FC von dem Mittelpunkte an den Berührungspunkt gezogen ist, so ist (3, 18. S.) die FC lothrecht auf der DE, und folglich ist FCE ein rechter Winkel. Es ist aber auch ACE ein rechter Winkel, und mithin ist der Winkel FCE, als der kleinere, dem Winkel ACE, als dem grösseren, gleich, welches unmöglich ist. Folglich ist nicht F der Mittelpunkt des Kreises ABC. Eben so kann dieses aber auch von jedem andern Punkte, ausser einem in der Linie AC, gezeigt werden. Folglich ist in der Linie AC des Kreises ABC Mittelpunkt.

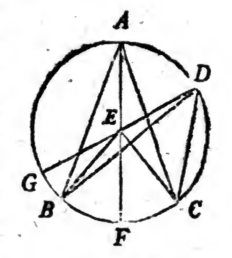
Wenn demnach eine gerade Linie den Kreis berührt, u. s. w. w. z. e. w.

20. *Saz.*

Lehrsaz. Im Kreise ist der Centriwinkel doppelt so gross, als der Peripheriewinkel, wenn beyde auf einerley Bogen stehen.

Es sey der Kreis ABC, und an seinem Mittelpunkte der Winkel BEC, an seiner Peripherie aber der Winkel BAC, und beyde sollen auf dem nämlichen Bogen BC stehen, so behaupte ich, dass der Winkel BEC doppelt so gross sey, als der Winkel BAC.

Beweis. Da die EA der EB, und mithin (1, 5. S.) der Winkel EAB dem Winkel EBA gleich ist, so sind die Winkel EAB, EBA zusammen doppelt so gross, als der Winkel EAB. Es ist aber (1, 32. S.) der Winkel BEF den beyden Winkeln EBA, EAB gleich; folglich ist auch der Winkel BEF doppelt so gross, als der Winkel EAB.



EAB. Aus eben den Gründen aber ist auch der Winkel FEC doppelt so grofs, als der Winkel EAC; folglich ist auch der ganze Winkel BEC doppelt so grofs, als der Winkel BAC.

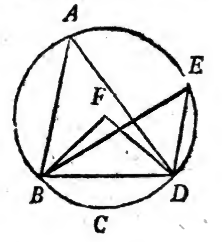
Man nehme wiederum eben diesen Centriwinkel BEC, aber der andere Winkel sey nun BDC, und man ziehe die DE und verlängere sie bis nach G, so kann eben so gezeigt werden, dafs der Winkel GEC doppelt so grofs sey, als der Winkel GDC. Von diesen aber ist GEB doppelt so grofs, als GDB; folglich ist auch der Rest BEC doppelt so grofs, als der Rest BDC.

Demnach ist im Kreise u. s. w. w. z. e. w.

21. *Saz.*

Lehrsaz. Im Kreise sind die Winkel in einerley Abschnitte einander gleich.

Es sey der Kreis ABCD und in dem Abschnitte BAED seyen die Winkel BAD, BED so behaupte ich, dafs die Winkel BAD, BED einander gleich seyen.



Beweis. Man nehme (3, 1. S.) des Kreises ABCD Mittelpunkt, und dieser sey F; hierauf ziehe man die BF, FD.

Da nun der Winkel BFD ein Centriwinkel der Winkel BAD aber ein Peripheriewinkel ist, und da sie auf einerley Bogen BCD stehen, so ist (3, 20. S.) der Winkel BFD doppelt so grofs, als der Winkel BAD. Aus eben dem Grunde aber ist BFD auch doppelt so grofs, als BED; folglich ist (7. Grundf.) der Winkel BAD dem Winkel BED gleich.

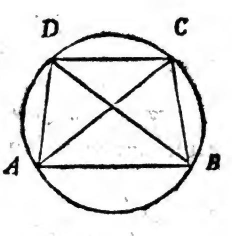
Im Kreise sind demnach die Winkel in einerley Abschnitte einander gleich, w. z. e. w.

22. *Saz.*

22. *Saz.*

Lehrsaz. Die Gegenwinkel der vierseitigen Figuren im Kreise sind zwey rechten gleich.

Es sey der Kreis ABCD und in demselben die vierseitige Figur ABCD, so behaupte ich, dass die Gegenwinkel derselben zwey rechten gleich seyen.



Beweis. Man ziehe die AC, BD. Da nun die drey Winkel eines jeden Dreyecks (1, 32. S.) zwey rechten gleich sind, so sind des Dreyecks ABC drey Winkel, CAB, ABC, BCA zwey rechten gleich. Nun ist aber (3, 21. S.) der Winkel CAB dem Winkel BDC gleich, denn sie sind in einerley Abschnitte ADCB; folglich ist der ganze Winkel ADC den beyden BAC, ACB gleich. Man seze den Winkel ABC beyderseits hinzu, so sind die Winkel ABC, CAB, ACB den Winkeln ABC, ADC gleich. Aber die Winkel ABC, BAC, ACB sind zwey rechten gleich; folglich sind auch die Winkel ABC, ADC zwey rechten gleich. Eben so kann nun gezeigt werden, dass auch die Winkel BAD, DCB zwey rechten gleich seyen.

Demnach sind die Gegenwinkel der vierseitigen Figuren im Kreise zwey rechten gleich, w. z. e. w.

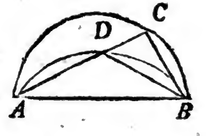
23. *Saz.*

Lehrsaz. Auf einerley geraden Linie können nicht zwey ähnliche und ungleiche Kreisabschnitte an einerley Seite beschrieben werden.

Beweis. Es seyen die Möglichkeit angenommen, auf einerley geraden Linie AB an einerley Seite zwey ähnliche und ungleiche Kreisabschnitte ACB, ADB, so ziehe man die Linien ADC, CB, DB. Da nun der Abschnitt ACB, dem Abschnitte ADB ähnlich ist, ähnliche Kreisabschnitte

aber

aber (3, 11. Erkl.) ſolche ſind, welche gleiche Winkel einſchlieſſen, ſo iſt der Winkel ADB dem Winkel ACB, alſo der äuſſere dem innern, gleich, welches (1, 16. S.) unmöglich iſt.



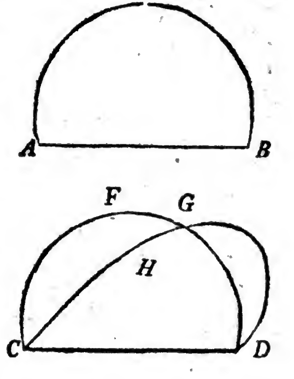
Folglich können auf einerley geraden Linie nicht zwey ähnliche und ungleiche Kreisabſchnitte an einerley Seite beſchrieben werden, w. z. e. w.

24. *Saz.*

Lehrſaz. Aehnliche Kreisabſchnitte über gleichen geraden Linien ſind einander gleich.

Es ſeyen über den gleichen geraden Linien AB, CD die ähnlichen Kreisabſchnitte AEB, CFD, ſo behaupte ich, daſs der Abſchnitt AEB dem Abſchnitte CFD gleich ſey.

Beweis. Man bringe den Abſchnitt AEB über den Abſchnitt CFD, ſo, daſs der Punkt A auf den Punkt C, und die Linie AB auf die Linie CD zu liegen komme, ſo wird, weil die AB der CD gleich iſt, auch der Punkt B auf den Punkt D fallen. Wenn aber die gerade Linie AB die CD deckt, ſo wird auch der Abſchnitt AEB den Abſchnitt CFD decken. Denn wenn, da die gerade Linie AB die CD deckt, doch der Abſchnitt AEB den Abſchnitt CFD nicht deckte, ſondern über denſelben hervorragte, wie CHGD, ſo würde der Kreis CHGD den Kreis CFD in mehr als zwey Punkten, nämlich in den Punkten C, G, D ſchneiden. Nun ſchneidet aber ein Kreis einen andern (3, 10. S.) nicht in mehr als zwey Punkten; es iſt alſo unmöglich, daſs der Kreis CGD den Kreis CFD in den Punkten C, G, D ſchneide; und folglich iſt es unmög-



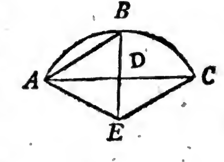
möglich, daſs wenn die Linie AB die CD deckt, doch der Abſchnitt AEB den Abſchnitt CFD nicht decken ſollte. Er muſs ihn alſo decken, und ſolglich ihm gleich ſeyn.

Demnach ſind ähnliche Kreisabſchnitte u. ſ. w. w. z. e. w.

25. *Saz.*

Aufgabe. Wenn ein Kreisabſchnitt gegeben iſt, den zugehörigen Kreis zu beſchreiben.

Es ſey der gegebene Kreisabſchnitt ABC, und man ſoll den Kreis beſchreiben, welcher dem Kreisabſchnitte ABC zugehört.



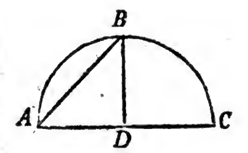
Auflöſung und *Beweis.* Man halbire die Linie AC in dem Punkte D, errichte in dem Theilungspunkte die DB lothrecht auf der AC, und ziehe die AB, ſo iſt der Winkel ABD entweder gröſſer, oder eben ſo groſs, oder kleiner, als der Winkel BAD.

Er ſey *erſtlich* gröſſer, ſo ſeze man (1, 23. S.) an den Punkt A der Linie BA den Winkel BAE, welcher dem Winkel ABD gleich ſey, und ziehe die EC.

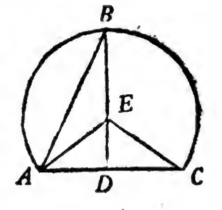
Da nun der Winkel ABE dem Winkel BAE gleich iſt, ſo iſt (1, 6. S.) auch die EB der AE gleich. Und da die AD der DC gleich, die DE aber gemeinſchaftlich iſt, ſo ſind die beyden AD, DE den beyden CD, DE ſtückweiſe gleich, auch iſt der Winkel ADE dem Winkel CDE gleich, denn ſie ſind beyde rechte; folglich iſt (1, 4. S.) auch die Grundlinie AE der Grundlinie CE gleich. Es iſt aber gezeigt worden, daſs die AE der BE gleich ſey; folglich iſt auch die BE der CE gleich, und mithin ſind die drey gerade Linien AE, EB, EC einander gleich. Demnach wird der aus dem Mittelpunkte E und mit der Weite einer von den drey Linien AE, EB, EC beſchriebene Kreis auch durch die übrigen Punkte gehen, und der dem gegebenen Abſchnitte zugehörige Kreis ſeyn. Und ſo iſt alſo der dem gegebenen Abſchnitte zugehörige

Kreis

Kreis beſchrieben. Auch iſt es offenbar, daſs der Abſchnitt ABC kleiner, als der Halbkreis, ſey, weil der Mittelpunkt E auſſerhalb deſſelben liegt.



Eben ſo kann nun, wenn der Winkel ABD dem Winkel BAD gleich iſt gezeigt werden, daſs die AD jeder von den beyden BD, DC gleich ſey, und mithin die drey Linien DA, DB, DC einander gleich ſeyen, wie auch daſs D der Mittelpunkt des zu vollendenden Kreiſes, und mithin ABC ein Halbkreis ſey.



Iſt endlich der Winkel ABD kleiner, als der Winkel BAD, und man ſezt an den Punkt A der Linie BA einen dem Winkel ABD gleichen Winkel innerhalb des Abſchnitts ABC, ſo fällt der Mittelpunkt in die Linie DB, und es iſt folglich der Abſchnitt ABC gröſſer, als der Halbkreis.

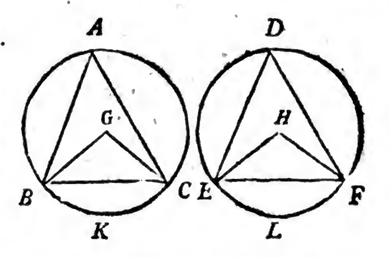
So iſt demnach wenn ein Kreisabſchnitt gegeben worden, der demſelben zugehörige Kreis beſchrieben, w. z. v. w.

26. *Saz.*

Lehrſaz. In gleichen Kreiſen ſtehen gleiche Winkel, es mögen Centriwinkel oder Peripheriewinkel ſeyn, auf gleichen Bogen.

Es ſeyen die Kreiſe ABC, DEF und in denſelben die gleichen Centriwinkel BGC, EHF und die gleichen Peripheriewinkel BAC, EDF, ſo behaupte ich, daſs der Bogen BKC dem Bogen ELF gleich ſey.

Beweis. Man ziehe die BC, EF. Da nun die Kreiſe ABC, DEF gleich ſind, ſo ſind auch ihre Halbmeſſer gleich, und folglich ſind die beyden BG, GC den beyden EH, HF gleich, auch iſt der Winkel bey G dem Winkel bey H gleich; folglich iſt (1, 4. S.) auch die Grundlinie BC der Grundlinie EF gleich. Und da der Winkel bey A dem



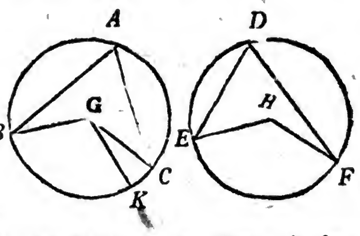
dem Winkel bey D gleich ist, so ist (3, 11. Erkl.) der Abschnitt BAC dem Abschnitte EDF ähnlich, auch sind sie über gleichen geraden Linien. Aber ähnliche Kreisabschnitte über gleichen geraden Linien sind (3, 24. S.) einander gleich; folglich ist der Abschnitt BAC dem Abschnitte EDF gleich. Es ist aber auch der ganze Kreis ABC dem ganzen Kreise EDF gleich; folglich ist auch der Rest BKC dem Reste ELF gleich.

Demnach stehen in gleichen Kreisen u. s. w. w. z. e. w.

27. *Saz.*

Lehrsaz. In gleichen Kreisen sind Winkel, die auf gleichen Bogen stehen, es mögen Centriwinkel oder Peripheriewinkel seyn, einander gleich.

In den gleichen Kreisen ABC, DEF stehen die Centriwinkel BGC, EHF auf gleichen Bogen BC, EF so behaupte ich, dass der Winkel BGC dem Winkel EHF, und der Winkel BAC dem Winkel EDF gleich sey.



Beweis. Wenn der Winkel BGC dem Winkel EHF gleich ist, so ist (3, 20. S.) auch der Winkel BAC dem Winkel EDF gleich. Ist dies aber nicht, so ist einer von ihnen grösser, als der andere. Es sey BGC der grössere; so seze man (1, 23. S.) an den Punkt G der Linie BG den Winkel BGK, welcher dem Winkel EHF gleich sey. Nun stehen gleiche Centriwinkel (3, 26. S.) auf gleichen Bogen; folg-

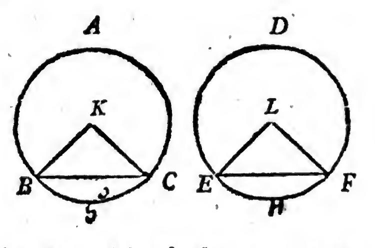
folglich ist der Bogen BK dem Bogen EF gleich. Aber der Bogen EF ist dem Bogen BC gleich; folglich ist auch der Bogen BK dem Bogen BC, der kleinere dem grössern, gleich, welches unmöglich ist. Mithin ist der Winkel BGC dem Winkel EHF nicht ungleich also gleich. Der Winkel bey A aber ist die Hälfte des Winkels BGC, und der Winkel bey D die Hälfte des Winkels EHF; folglich ist auch der Winkel bey A dem Winkel bey D gleich.

Demnach sind in gleichen Kreisen u. s. w. w. z. e. w.

28. *Saz.*

Lehrsaz. In gleichen Kreisen schneiden gleiche gerade Linien gleiche Bogen ab; sie machen nämlich den grössern Bogen dem grössern und den kleinern Bogen dem kleinern gleich.

Es seyen die gleichen Kreise ABC, DEF und in denselben schneiden die gleichen geraden Linien BC, EF die grösseren Bogen BAC, EDF und die kleinern BGC, EHF ab, so behaupte ich, dass der grössere Bogen BAC dem grösseren EFD, und der kleinere Bogen BGC dem kleinern EHF gleich sey.



Beweis. Man nehme die Mittelpunkte K, L der Kreise, und ziehe die KB, KC, EL, LF.

Da die Kreise gleich sind, so sind auch ihre Halbmesser gleich, folglich sind die beyden BK, KC den beyden EL, LF gleich, auch ist die Grundlinie BC der Grundlinie EF gleich; folglich ist (1, 8. S.) auch der Winkel BKC dem Winkel ELF gleich. Nun stehen (3, 26. S.) gleiche Centriwinkel auf gleichen Bogen; folglich ist der Bogen BGC dem Bogen EHF gleich. Es ist aber auch der ganze Kreis ABC dem ganzen Kreise

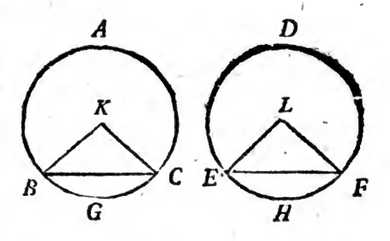
Kreiſe DEF gleich; folglich iſt auch der übrige Bogen BAC dem übrigen Bogen EDF gleich.

Demnach ſchneiden in gleichen Kreiſen u. ſ. w. w. z. e. w.

29. *Saz.*

Lehrſaz. In gleichen Kreiſen ſind die geraden Linien, welche gleiche Bogen abſchneiden, einander gleich.

Es ſeyen die gleichen Kreiſe ABC, DEF und in denſelben durch die geraden Linien BC, EF gleiche Bogen BGC, EHF abgeſchnitten, ſo behaupte ich, daſs die Linie BC der Linie EF gleich ſey.



Beweis. Man nehme die Mittelpunkte K, L der Kreiſe, und ziehe die BK, KC, EL, LF.

Da nun der Bogen BGC dem Bogen EHF gleich iſt, ſo iſt (3, 27. S.) auch der Winkel BKC dem Winkel ELF gleich, und da die Kreiſe ABC, DEF gleich ſind, ſo ſind auch ihre Halbmeſſer gleich; folglich ſind die beyden BK, KC den beyden EL, LF gleich, auch ſchlieſſen ſie gleiche Winkel ein; folglich iſt (1, 4. S.) auch die Grundlinie BC der Grundlinie EF gleich.

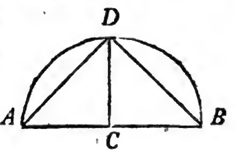
Demnach ſind in gleichen Kreiſen u. ſ. w. w. z. e. w.

30. *Saz.*

Aufgabe. Einen gegebenen Kreisbogen zu halbiren.

Es ſey ADB der gegebene Kreisbogen, welcher halbiret werden ſoll.

Auflösung. Man ziehe die AB, halbire sie (1, 10. S.) in dem Punkte C, errichte (1, 11. S.) in eben diesem Punkte die CD lothrecht auf die AB, und ziehe die AD, DB.



Beweis. Da die AC der CB gleich, und die CD gemeinschaftlich ist, so sind die beyden AC, CD den beyden BC, CD gleich, und der Winkel ACD ist dem Winkel BCD gleich, denn es ist jeder ein rechter; folglich ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie AD der Grundlinie DB gleich. Nun schneiden gleiche gerade Linien (3, 28. S.) gleiche Bogen ab, sie machen nämlich den grösseren Bogen dem grösseren, und den kleineren dem kleinern gleich; jeder von den Bogen AD, DB aber ist kleiner, als der Halbkreis; folglich ist der Bogen AD dem Bogen DB gleich, und mithin der gegebene Kreisbogen halbirt, w. z. v. w.

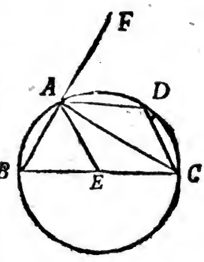
31. *Saz.*

Lehrsaz. Im Kreise ist der Winkel im Halbkreise ein rechter, der im grösseren Abschnitte aber kleiner, als ein rechter, und der im kleinern, grösser, als ein rechter; auch ist der Winkel des grösseren Abschnitts grösser, als ein rechter, der Winkel des kleinern Abschnitts aber kleiner, als ein rechter.

Es sey der Kreis ABCD, dessen Durchmesser BC, sein Mittelpunkt E, und man ziehe die BA, AC, AD, DC, so behaupte ich, dass der Winkel im Halbkreise BAC ein rechter, der Winkel ABC aber in dem Abschnitt ABC, welcher grösser, als der Halbkreis, ist, kleiner, als ein rechter, und der Winkel in dem Abschnitte ADC, welcher kleiner, als der Halbkreis, ist, grösser, als ein rechter, sey.

Beweis. Man ziehe die AE, und verlängere die BA bis nach F.

Da nun die BE der EA gleich ist, so ist (1, 5. S.) auch der Winkel EAB dem Winkel EBA gleich. Da ferner die EA der EC gleich ist, so ist auch der Winkel ACE dem Winkel



kel CAE gleich, und folglich ist der ganze Winkel BAC den beyden Winkeln ABC, ACB gleich. Nun ist auch der Winkel FAC, als äusserer Winkel des Dreyecks ABC (1, 32. S.) den beyden Winkeln ABC, ACB gleich; folglich ist auch der Winkel BAC dem Winkel FAC gleich, und mithin ist (1, 10. Erkl.) jeder von beyden ein rechter. Demnach ist also der Winkel BAC im Halbkreise BAC ein rechter. Und da die zwey Winkel ABC, BAC des Dreyecks ABC (1, 17. S.) kleiner, als zwey rechte sind, aber der Winkel BAC ein rechter ist, so ist der Winkel ABC kleiner, als ein rechter, und er ist in dem Abschnitte ABC, welcher grösser, als der Halbkreis, ist.

Da ferner ABCD eine vierseitige Figur im Kreise ist, und die Gegenwinkel einer vierseitigen Figur im Kreise (3, 22. S.) zwey rechten gleich sind, so sind die Winkel ABC, ADC zwey rechten Winkeln gleich, auch ist der Winkel ABC kleiner, als ein rechter; folglich ist der andere ADC grösser, als ein rechter, und dieser ist in dem Abschnitte ADC, welcher kleiner, als der Halbkreis, ist.

Ich behaupte ferner, dass der Winkel des grösseren Abschnitts, welcher von dem Bogen ABC und der geraden Linie AC eingeschlossen wird, grösser, als ein rechter, der Winkel des kleinern Abschnitts aber, welcher von dem Bogen ADC und der geraden Linie AC eingeschlossen wird, kleiner, als ein rechter, sey. Uud dies ist für sich selbst klar; denn da der von den geraden Linien BA AC eingeschlossene Winkel ein rechter ist, so ist der von dem Bogen ABC und der geraden Linie AC eingeschlossene grösser, als ein rechter. Da ferner der von den geraden Linien AC, AF eingeschlossene Winkel ein rechter ist, so ist der von der geraden Linie CA und dem Bogen ADC eingeschlossene Winkel kleiner, als ein rechter.

Demnach ist im Kreise u. s. w. w. z. e. w.

Ein anderer Beweis, dass BAC ein rechter Winkel sey.

 Da

Da der Winkel AEC das Doppelte von BAE ist, denn er ist (1, 32. S,) seinen beyden innern Gegenwinkeln gleich, aus eben dem Grunde aber auch der Winkel AEB das Doppelte von EAC ist, so sind die Winkel AEB, AEC zusammen das Doppelte von BAC. Aber die Winkel AEB, AEC zusammen sind (1, 13. S.) zwey rechte; folglich ist der Winkel BAC ein rechter; w. z. e. w.

Zusaz. Hieraus erhellet, dass, wenn ein Winkel eines Dreyecks den beyden übrigen gleich ist, er ein rechter Winkel sey, weil alsdann auch sein Nebenwinkel diesen beyden gleich ist; Nebenwinkel aber die einander gleich sind, rechte sind.

32. *Saz.*

Aufgabe. Wenn eine gerade Linie den Kreis berührt, und von dem Berührungspunkte eine gerade Linie an den Kreis gehet, welche ihn schneidet, so sind die Winkel, welche sie mit der berührenden Linie macht, den Winkeln in den verwechselten Kreisabschnitten gleich.

Es berühre den Kreis ABCD die gerade Linie EF in dem Punkte B, und von dem Punkte B gehe an den Kreis ABCD die Linie BD, welche ihn schneidet, so behaupte ich, dass die Winkel, welche die Linie BD mit der Tangente EF macht, den Winkeln in den verwechselten Kreisabschnitten gleich seyen, dass heisst, dass der Winkel FBD dem Winkel in dem Abschnitte BAD, der Winkel EBD aber dem Winkel in dem Abschnitte DCB gleich sey.

Beweis. Man errichte (1, 11. S.) in dem Punkte B auf der EF die BA lothrecht, nehme in dem Bogen BD nach Belieben einen Punkt C an, und ziehe AD, DC, CB.

A
D
C
E
B
F

Da die gerade Linie EF den Kreis ABCD in dem Punkte B berührt, und in dem Berührungspunkte B die BA auf der Tangente lothrecht aufge-

gerichtet ist, so ist (3, 19. S.) in der Linie BA der Mittelpunkt des Kreises ABCD, folglich ist der Winkel ADB, als Winkel im Halbkreise, (3, 31. S.) ein rechter, und mithin sind die beyden übrigen BAD, ABD zusammen einem rechten gleich. Es ist aber auch der Winkel ABF ein rechter, und folglich auch der Winkel ABF den Winkeln BAD, ABD gleich. Man nehme beyderseits den Winkel ABD weg, so ist der übrige Winkel DBF dem Winkel BAD in dem verwechselten Kreisabschnitte gleich.

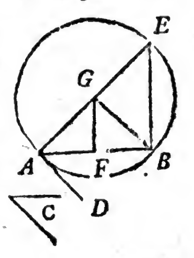
Da ferner ABCD eine vierseitige Figur im Kreise ist, so sind ihre Gegenwinkel (3, 22. S.) zwey rechten gleich; folglich die Winkel DBF, DBE (1, 13. S.) den Winkeln BAD, BCD gleich. Es ist aber gezeigt worden, daſs der Winkel BAD dem Winkel DBF gleich sey; folglich ist auch der übrige Winkel DBE dem Winkel DCB in dem verwechselten Kreisabschnitte gleich.

Wenn demnach eine gerade Linie den Kreis berührt, u. s. w. w. z. e. w.

33. *Saz.*

Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie einen Kreisabschnitt zu beschreiben, der einen Winkel faſst, welcher einem gegebenen geradlinigen Winkel gleich sey.

Es sey die gegebene gerade Linie AB, der gegebene geradlinige Winkel C, und man soll auf der gegebenen geraden Linie AB einen Kreisabschnitt beschreiben, der einen Winkel faſst, welcher dem Winkel bey C gleich sey.

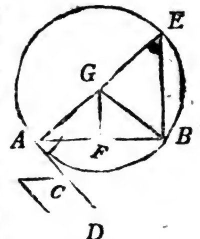


Auflösung. Der Winkel bey C ist entweder ein spizer, oder ein rechter, oder ein stumpfer.

Er sey *erstlich* ein spizer, so seze man (1, 23. S.) an den Punkt A der Linie AB den Winkel BAD, welcher dem Winkel C gleich sey. Es ist also auch BAD ein spizer Winkel. Nun

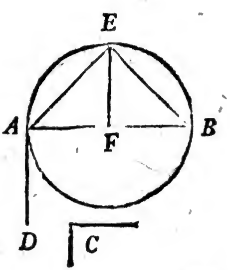
er-

errichte man (1, 11. S.) in dem Punkte A auf der AD die AE lothrecht, halbire die AB in dem Punkte F, errichte in eben diesem Punkte die FG auf der AB lothrecht, und ziehe die GB.



Beweis. Da die FB der AF gleich, und die FG gemeinschaftlich ist, so sind die beyden AF, FG den beyden FB, FG gleich, auch ist der Winkel AFG dem Winkel GFB gleich; folglich ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie AG der Grundlinie BG gleich, und mithin gehet der aus dem Mittelpunkte G mit der Weite AG beschriebene Kreis durch den Punkt B. Man beschreibe ihn also, und er sey ABE, hierauf ziehe man die BE. Da nun die AD in dem Punkte A des Durchmessers AE, auf dem Durchmesser lothrecht stehet, so ist AD (3, 16. S.) eine Tangente des Kreises, und da die gerade Linie AD den Kreis ABE berührt, und von dem Berührnngspunkte A die gerade Linie AB an den Kreis ABE gehet, so ist (3, 32. S.) der Winkel DAB dem Winkel AEB in dem verwechselten Kreisabschnitte gleich. Aber der Winkel DAB ist dem Winkel bey C gleich, folglich ist auch der Winkel bey C dem Winkel AEB gleich; und es ist also auf der gegebenen geraden Linie AB ein Kreisabschnitt AEB beschrieben worden, welcher einen Winkel AEB fasst, der dem gegebenen Winkel bey C gleich ist.

Nun sey *zweytens* der gegebene Winkel ein rechter, und man soll wiederum auf AB einen Kreisabschnitt beschreiben, welcher einen Winkel fasst, der dem gegebenen rechten Winkel bey C gleich sey.

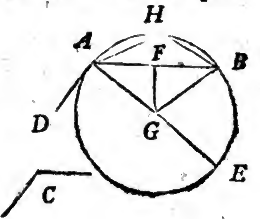


Auflösung und *Beweis.* Man setze wiederum an den Punkt A der Linie AB einen Winkel BAD, der dem rechten Winkel bey C gleich sey, hierauf halbire man (1, 10. S.) die AB in dem Punkte F, und beschreibe aus dem Mittelpunkte F mit der Weite FA oder FB den Kreis ABE, so ist (3, 16. S.) die gerade Linie

AD

AD eine Tangente des Kreises ABE, weil der Winkel bey A ein rechter ist. Auch ist der Winkel BAD dem Winkel in dem Abschnitte AEB gleich, denn auch dieser ist, (3, 31. S.) als Winkel im Halbkreise, ein rechter. Aber der Winkel BAD ist dem Winkel bey C gleich; folglich ist wiederum auf der geraden Linie AB ein Kreisabschnitt AEB beschrieben worden, welcher einen Winkel fasst, der dem Winkel bey C gleich ist.

Endlich sey *drittens* der Winkel bey C ein stumpfer.



Auflösung und *Beweis*. Man seze an den Punkt A der geraden Linie AB einen dem Winkel bey C gleichen Winkel BAD, hierauf errichte man in dem Punkte A die die AE auf die AD lothrecht, halbire wiederum die AB in dem Punkte F, errichte auf der AB in F die FG lothrecht, und ziehe die GB. Da nun wiederum die AF der FB gleich, und FG gemeinschaftlich ist, so sind die beyden AF, FG den beyden BF, FG gleich, auch ist der Winkel AFG dem Winkel BFG gleich; folglich ist auch (1, 4. S.) die Grundlinie AG der Grundlinie BG gleich, und mithin gehet der aus dem Mittelpunkte G und mit der Weite AG beschriebene Kreis auch durch den Punkt B. Er gehe also durch, wie AEB. Da nun die AD auf dem Endpunkte A des Durchmessers AE lothrecht stehet, so berührt die AD (3, 16. S.) den Kreis AEB, und da von dem Berührungspunkte A die gerade Linie AB an den Kreis geht, so ist (3, 32. S.) der Winkel BAD dem Winkel in den verwechselten Kreisabschnitte AHB gleich; aber der Winkel BAD ist dem Winkel bey C gleich; folglich ist auch der Winkel in dem Abschnitte AHB dem Winkel bey C gleich; und es ist also auf der gegebenen geraden Linie AB ein Kreisabschnitt AHB beschrieben worden, welcher einen Winkel fasst, der dem Winkel bey C gleich ist, w. z. v. w.

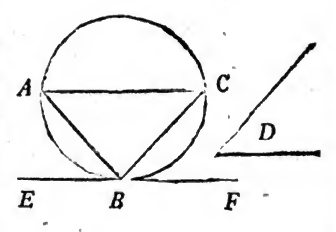
34. *Saz.*

Aufgabe. Von einem gegebenen Kreise einen Abschnitt abzuschneiden, der einen Winkel fasst,

fafst, welcher einem gegebenen geradlinigen Winkel gleich fey.

Es fey der gegebene Kreis ABC, der gegebene geradlinige Winkel D, und man foll von dem Kreife ABC einen Abfchnitt abfchneiden, welcher einen Winkel fafst, der dem Winkel bey D gleich fey.

Auflöfung. Man ziehe (3, 17. S.) an einen Punkt B des Kreifes ABC die Tangente EF, und feze (1, 23. S.) an den Punkt B der Linie EF den Winkel FBC, welcher dem Winkel D gleich fey.



Beweis. Da nun die gerade Linie EF den Kreis ABC berührt, und von dem Beruhrungspunkte B die BC an den Kreis gehet, fo ift (3, 32 S.) der Winkel FBC dem Winkel in dem verwechfelten Kreisabfchnitte BAC gleich. Aber der Winkel FBC ift dem Winkel bey D gleich; folglich ift auch der Winkel in dem Abfchnitte BAC, dem Winkel bey D gleich. So ift alfo von dem gegebenen Kreife ABC ein Abfchnitt BAC abgefchnitten worden, welcher einen Winkel fafst, der dem gegebenen geradlinigen Winkel bey D gleich ift, w. z. v. w.

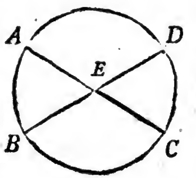
35. *Saz.*

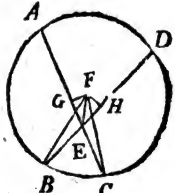
Lehrfaz. Wenn im Kreife zwey gerade Linien einander fchneiden, fo ift das Rechteck aus den Abfchnitten der einen dem Rechtecke aus den Abfchnitten der andern gleich.

In dem Kreife ABCD fchneiden die geraden Linien AC, BD einander in dem Punkte E, fo behaupte ich, dafs das Rechteck aus AE, EC dem Rechtecke aus DE, EB gleich fey.

Beweis. Wenn die gerade Linien AC, BD Durchmeffer find, dafs alfo E der Mittelpunkt des Kreifes ABCD ift, fo ift

ist offenbar, dass, da die Linien AE, EC, DE, EB einander gleich sind, auch das Rechteck aus AE, EC dem Rechteck aus DE, EB gleich sey.





Die Linien AC, DB sollen also nicht durch den Mittelpnnkt gehen, so nehme man (3, 1. S.) den Mittelpunkt des Kreises ABCD, uud dieser sey F, hierauf fälle man (1, 12. S.) aus dem Mittelpunkte F auf die geraden Linien AC, DB die Lothe FG, FH, und ziehe die FB, FC, FE.

Da nun die durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie FG die nicht durch den Mittelpunkt gehende AC lothrecht schneidet, so halbirt sie (3, 3. S.) dieselbige auch, und es ist also die AG der GC gleich. Da nun ferner die gerade Linie AC in dem Punkte G in gleiche, in dem Punkte E aber in ungleiche Theile getheilt ist, so ist (2, 5. S.) das Rechteck aus AE, EC sammt dem Quadrate von EG dem Quadrate von GC gleich. Man seze beyderseits das Quadrat von GF hinzu, so ist das Rechteck aus AE, EC sammt den Quadraten von GE, GF den Qnadraten von CG, GF gleich. Aber den Quadraten von EG, GF ist (1, 47. S.) das Quadrat von FE, den Quadraten von CG, GF hingegen ist das Quadrat von FC gleich; folglich ist das Rechteck aus AE, EC sammt dem Quadrate von FE dem Quadrate von FC gleich. Die FC aber ist der FB gleich; folglich ist das Rechteck aus AE, EB sammt dem Quadrate von EF dem Quadrate von FB gleich. Aus eben den Gründen aber ist auch das Rechteck aus DE, EB sammt dem Quadrate von FE dem Quadrate von FB gleich. Es ist aber gezeigt worden, dass auch das Rechteck aus AE, EC sammt dem Quadrate von FE dem Quadrate von FB gleich sey; folglich ist auch das Rechteck aus AE, EC sammt dem Quadrate von FE dem Rechtecke aus DE, EB sammt dem Quadrate von FE gleich. Man nehme beyderseits das Quadrat von FE hinweg, so ist das Rechteck aus AE, EC dem Rechtecke aus DE, EB gleich.

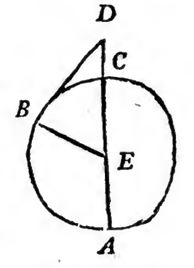
Wenn

Wenn demnach im Kreiſe zwey gerade Linien einander ſchneiden, u. ſ. w. w. z. e. w.

36. *Saz.*

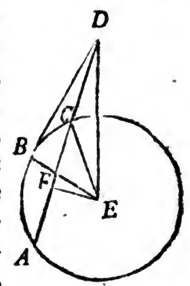
Lehrſaz. Wenn auſſerhalb des Kreiſes ein Punkt angenommen wird, und es gehen von demſelben zwey gerade Linien an den Kreis, wovon die eine ihn ſchneidet, die andere aber ihn berührt, ſo iſt das Rechteck aus der ganzen ſchneidenden Linie und ihrem auſſerhalb zwiſchen dem angenommenen Punkte und der erhabenen Peripherie des Kreiſes liegenden Abſchnitte dem Quadrate der berührenden Linie gleich.

Man nehme auſſerhalb des Kreiſes ABC einen Punkt D an, und von dem Punkte D gehen an den Kreis ABC zwey gerade Linien DCA, DB, wovon die DCA den Kreis ABC ſchneide, die DB aber ihn berühre, ſo behaupte ich, daſs das Rechteck aus AD, DC dem Quadrate von DB gleich ſey.



Beweis. Die Linie DCA gehet entweder durch den Mittelpunkt, oder nicht. Sie gehe zuerſt durch den Mittelpunkt des Kreiſes, und dieſer ſey E, alsdann ziehe man die Linie EB, ſo iſt (3, 18. S.) EBD ein rechter Winkel. Und da die gerade Linie AC in dem Punkte E halbirt und ihr die CD angeſezt iſt, ſo iſt (2, 6. S.) das Rechteck aus AD, DC ſammt dem Quadrate von EC dem Quadrate von ED gleich. Es iſt aber die EC der EB gleich; folglich iſt das Rechteck aus AD, DC ſammt dem Quadrate von EB dem Quadrate von DE gleich. Nun iſt aber (1, 47. S.) das Quadrat von DE den Quadraten von DB, BE gleich, denn der Winkel EBD iſt ein rechter; folglich iſt das Rechteck aus AD, DC ſammt dem Quadrate von EB den Quadraten von DB, BE gleich. Man nehme beyderſeits das Quadrat von EB weg, ſo iſt das Rechteck aus AD, DC dem Quadrate der berührenden Linie DB gleich.

Aber



Aber die DCA gehe nun nicht durch den Mittelpunkt des Kreises ABC, so nehme man den Mittelpunkt desselben, und er sey E, hierauf fälle man (1, 12. S.) von E auf die AC die EF lothrecht, und ziehe die EB, EC, ED. Nun ist EFD ein rechter Winkel; und da die durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie EF die nicht durch den Mittelpunkt gehende AC lothrecht schneidet, so halbirt sie (3, 3. S.) dieselbige auch, und es ist folglich die AF der FC gleich. Da ferner die Linie AC in dem Punkte F halbirt, und ihr die CD angesezt ist, so ist (2, 6. S.) das Rechteck aus AD, DC sammt dem Quadrate von FC dem Quadrate von FD gleich. Man seze beyderseits das Quadrat von EF hinzu, so ist das Rechteck aus AD, DC sammt den Quadraten von FC, EF den Quadraten von FD, FE gleich. Aber den Quadraten von DF, FE ist (1, 47. S.) das Quadrat von DE gleich, denn der Winkel EFD ist ein rechter, den Quadraten von CF, FE hingegen ist das Quadrat von CE gleich; folglich ist das Rechteck aus AD, DC sammt dem Quadrate von CE dem Quadrate von ED gleich. Es ist aber die EC der EB gleich; folglich ist das Rechteck aus AD, DC sammt dem Quadrate von EB dem Qaadrate von ED gleich. Dem Quadrate von ED aber sind (1, 47. S.) die Quadrate von EB, BD gleich, denn der Winkel EBD ist ein rechter; folglich ist das Rechteck aus AD, DC sammt dem Quadrate von EB den Quadraten von EB, BD gleich. Man nehme beyderseits das Quadrat von EB hinweg, so ist folglich das Rechteck aus AD, DC dem Quadrate von BD gleich.

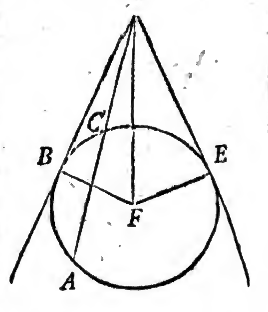
Wenn demnach ausserhalb des Kreises u. s. w. w. z. e. w.

37. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn ausserhalb des Kreises ein Punkt angenommen wird, und es gehen von demselben zwey gerade Linien an den Kreis, wovon die eine ihn trifft, die andere ihn schneidet, und das Rechteck aus der ganzen schneiden-

denden Linie und ihrem aufserhalb zwischen dem angenommenen Punkte und der erhabenen Peripherie liegenden Abschnitte ist dem Quadrate der treffendenden Linie gleich, so ist die treffende Linie eine Tangente des Kreises.

Es sey aufserhalb des Kreises ABC der Punkt D angenommen, und von dem Punkte D gehen an den Kreis ABC die zwey gerade Linien DCA, DB und die DCA schneide den Kreis, die DB aber treffe ihn, und es sey das Rechteck aus AD, DC dem Quadrate von DB gleich, so behaupte ich, dafs die DB den Kreis ABC berühre.



Beweis. Man ziehe (3, 17. S.) die Tangente DE an den Kreis ABC, nehme dessen Mittelpunkt F, und ziehe die Linien FE, FB, FD so ist (3, 18. S.) der Winkel FED ein rechter.

Da nun die DE den Kreis ABC berührt, die DCA aber ihn schneidet, so ist (3, 16. S.) das Rechteck aus AD, DC dem Quadrate von DE gleich. Es ist aber angenommen, dafs das Rechteck aus AD, DC dem Quadrate von DB gleich sey; folglich ist das Quadrat von DE dem Quadrate von DB, und mithin auch die DE der DB gleich. Es ist aber auch die FE der FB gleich; folglich sind die beyden DE, EF den beyden DB, BF gleich. Auch ist die Grundlinie FD beyden Dreyecken gemeinschaftlich; folglich ist (1, 8. S.) auch der Winkel DEF dem Winkel DBF gleich. Der Winkel DEF aber ist ein rechter; folglich ist auch der Winkel DBF ein rechter, und die FB ist, wenn sie verlängert wird, ein Durchmesser. Aber eine auf dem Endpunkte des Durchmessers lothrecht stehende Linie berührt (3, 16. S.) den Kreis; folglich berührt die DB den Kreis ABC. Eben so kann dieses erwiesen werden, wenn der Mittelpunkt in der Linie AC liegt.

Wenn demnach aufserhalb des Kreises u. s. w. w. z. e. w.

Euklids

EUKLIDS ELEMENTE.

VIERTES BUCH.

Erklärungen.

1. Eine geradlinige Figur heifst *in eine andere geradlinige Figur befchrieben*, wenn jeder Winkel der einbefchriebenen eine von den Seiten derjenigen, in welche fie befchrieben ift, berührt.

2. Eine geradlinige Figur heifst *um eine andere geradlinige Figur befchrieben*, wenn jede Seite der umfchriebenen einen von den Winkeln derjenigen, um welche fie befchrieben ift, berührt.

3. Eine geradlinige Figur heifst *in einen Kreis befchrieben*, wenn jeder Winkel der einbefchriebenen Figur die Peripherie des Kreifes berührt.

4. Eine geradlinige Figur heifst *um einen Kreis befchrieben*, wenn jede Seite der umfchriebenen Figur, die Peripherie des Kreifes berührt.

5. Ein Kreis heifst *in eine geradlinige Figur befchrieben*, wenn die Peripherie des Kreifes jede Seite der Figur, in welche er befchrieben ift, berührt.

6. Ein

6. Ein Kreis heiſst *um eine geradlinige Figur beſchrieben*, wenn die Peripherie des Kreiſes jeden Winkel der Figur, um welche er beſchrieben iſt, berührt.

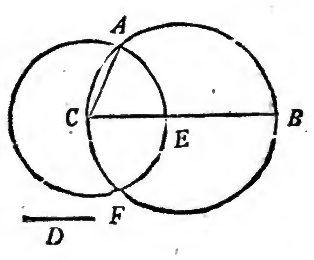
7. Eine gerade Linie heiſst *in einen Kreis eingetragen*, wenn ihre Endpunkte in der Peripherie des Kreiſes ſind.

1. *Saz.*

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis eine gerade Linie einzutragen, welche einer gegebenen geraden Linie, die nicht gröſſer iſt, als des Kreiſes Durchmeſſer, gleich ſey.

Es ſey der gegebene Kreis ABC, die gegebene gerade Linie, welche nicht gröſſer iſt, als des Kreiſes Durchmeſſer, ſey D, uud man ſoll in den Kreis ABC eine der D gleiche gerade Linie eintragen.

Auflöſung. Man ziehe den Durchmeſſer BC des Kreiſes ABC, wenn nun BC der D gleich iſt, ſo iſt das verlangte geſchehen, denn es iſt in den Kreis ABC eine der D gleiche gerade Linie BC eingetragen worden. Wenn dies aber nicht iſt, ſondern BC gröſſer, als D, iſt, ſo mache man die CE der D gleich, beſchreibe aus dem Mittelpunkte C mit der Weite CE einen Kreis EAF, und ziehe die CA.



Beweis. Da nun der Punkt C der Mittelpunkt des Kreiſes AEF iſt, ſo iſt die CA der CE gleich; aber auch die D iſt der CE gleich; folglich iſt die D auch der AC gleich. Und es iſt alſo in den gegebenen Kreis ABC eine der D, welche nicht gröſſer, als der Durchmeſſer des Kreiſes, iſt, gleiche gerade Linie CA eingetragen worden, w. z. v. w.

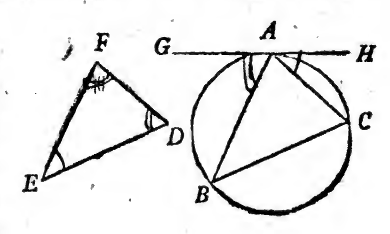
2. *Saz.*

2. Saz.

Aufgabe. In einem gegebenen Kreis ein Dreyeck zu beschreiben, das einem gegebenen Dreyecke gleichwinkelig sey.

Es sey der gegebene Kreis ABC, das gegebene Dreyeck DEF, und man soll in den Kreis ABC ein Dreyeck beschreiben, das dem Dreyecke DEF gleichwinkelig sey.

Auflösung. Man ziehe (3, 17. S.) an den Punkt A des Kreises ABC die Tangente GAH, und seze (1, 23. S.) an den Punkt A der Linie AH den Winkel HAC, der dem Winkel DEF, und an den Punkt A der Linie GA den Winkel GAB, der dem Winkel FDE gleich sey, und ziehe die BC.



Beweis. Da die Linie GAH den Kreis ABC berührt, und von dem Berührungspunkte die gerade Linie AC an den Kreis gehet, so ist (3, 32. S.) der Winkel HAC dem Winkel ABC in dem verwechselten Kreisabschnitte gleich. Aber der Winkel HAC ist dem Winkel DEF gleich; folglich ist auch der Winkel ABC dem Winkel DEF gleich.

Aus eben den Gründen ist auch der Winkel ACB dem Winkel EDF gleich; folglich ist (1, 32. S.) auch der übrige Winkel BAC dem übrigen Winkel EFD gleich. Das Dreyeck BAC ist also dem Dreyecke EFD gleichwinkelig, auch ist es in den Kreis ABC beschrieben.

Demnach ist in einen gegebenen Kreis ein Dreyeck beschrieben, das einem gegebenen Dreyecke gleichwinkelig ist, w. z. v. w.

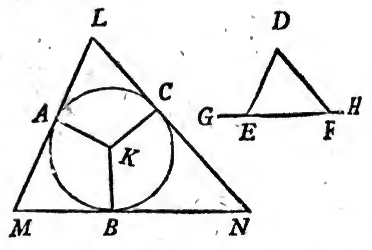
3. Saz.

Aufgabe. Um einen gegebenen Kreis ein Dreyeck zu beschreiben, das einem gegebenen Dreyecke gleichwinkelig sey.

Es

Es ſey der gegebene Kreis ABC, das gegebene Dreyeck DEF, und man ſoll um den Kreis ABC ein Dreyeck beſchreiben, das dem Dreyecke DEF gleichwinkelig ſey.

Aufllöſung. Man verlängere die EF auf beyden Seiten nach G, H alsdann nehme man (3, 1. S.) den Mittelpunkt K des Kreiſes ACB, und ziehe willkührlich die KB, hierauf ſeze man (1, 23. S.) an den Punkt K der Linie KB den Winkel BKA, der dem Winkel DEG, und den Winkel BKC, der dem Winkel DFH gleich ſey, und ziehe (3, 17. S.) durch die Punkte A, B, C, die Tangenten LAM, MBN, NCL.



Beweis. Da die Linien LM, MN, NL den Kreis ABC in den Punkten A, B, C berühren, und aus dem Mittelpunkte K die Linien KA, KB, KC an die Punkte A, B, C gezogen ſind, ſo ſind (3, 18. S.) die Winkel bey den Punkten A, B, C rehte. Da ferner die vier Winkel der vierſeitigen Eigur AMBK (1, 32. S.) vier rechten gleich ſind, indem ſolche in zwey Dreyecke getheilt werden kann, unter dieſen vier Winkeln aber die Winkel KAM, KBM zwey rechte ſind, ſo ſind auch die beyden übrigen Winkel AKB, AMB zwey rechten gleich. Nun ſind aber (1, 13. S.) auch die Winkel DEG, DEF zwey rechten gleich; folglich ſind die Winkel AKB, AMB den Winkeln DEG, DEF gleich. Unter dieſen aber iſt der Winkel AKB dem Winkel DEG gleich; folglich iſt auch der übrige Winkel AMB dem übrigen DEF gleich. Eben ſo kann nun gezeigt werden, daſs auch der Winkel LNM dem Winkel DFE gleich ſey; folglich iſt (1, 32. S.) auch der dritte Winkel MLN des einen Dreyecks dem dritten Winkel EDF des andern gleich, und mithin das Dreyeck LMN dem Dreyecke DEF gleichwinkelig, auch iſt es um den Kreis ABC beſchrieben.

Dem-

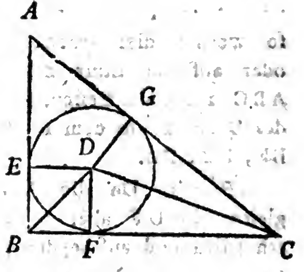
Demnach ist also um einen gegebenen Kreis ein Dreyeck beschrieben worden, das einem gegebenen Dreyecke gleichwinkelig ist, w. z. v. w.

4. *Saz.*

Aufgabe. In ein gegebenes Dreyeck einen Kreis zu beschreiben.

Es sey das Dreyeck ABC gegeben, und man soll in dasselbe einen Kreis beschreiben.

Auflösung. Man halbire (1, 9. S.) die Winkel ABC, BCA durch die geraden Linien BD, CD, welche in dem Punkte D zusammen treffen, und fälle sodann von dem Punkte D auf die geraden Linien AB, BC, CA (1, 12. S.) die DE, DF, DG lothrecht.



Beweis. Da der Winkel ABD dem Winkel CBD gleich ist, denn der Winkel ABC ist halbirt worden, und da der rechte Winkel BED dem rechten Winkel BFD gleich ist, so sind hier zwey Dreyecke EBD, DBF, in welchen zwey und zwey Winkel stückweise gleich sind, und welche die Seite BD, die einem der gleichen Winkel in beyden gegenüberliegt, gemeinschaftlich haben; folglich sind (1, 26. S.) auch in beyden die übrigen Seiten stückweise gleich, und es ist also die DE der DF gleich. Aus eben den Gründen ist auch die DG der DF gleich; folglich gehet der Kreis, der aus dem Mittelpunkte D, und mit der Weite DE, DF oder DG beschrieben wird, auch durch die übrigen Punkte, und berührt die geraden Linien AB, BC, CA, weil bey den Punkten E, F, G rechte Winkel sind. Denn wenn er die genannten Linien schnitte, so fiele eine auf dem Durchmesser des Kreises in seinem Endpunkte lothrecht errichtete Linie innerhalb des Kreises, welches (3,

 16. S.)

16. S.) unmöglich ist. Folglich schneidet der aus dem Mittelpunkte D mit der Weite DE, DF, DG beschriebene Kreis die geraden Linien AB, BC, CA nicht; er berührt sie also, und ist folglich (4, 5. Erkl.) der in das Dreyeck ABC beschriebene Kreis.

Demnach ist in das Dreyeck ABC der Kreis EFG beschrieben worden, w. z. v. w.

5. *Saz.*

Aufgabe. Um ein gegebenes Dreyeck einen Kreis zu beschreiben.

Es sey das gegebene Dreyeck ABC, und man soll um dasselbe einen Kreis beschreiben.

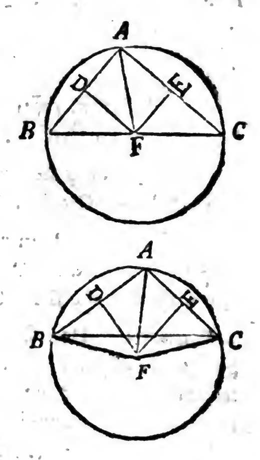
Auflösung. Man halbire (1, 10. S.) die Seiten AB, AC, in den Punkten D, E, und errichte (1, 11. S.) in eben diesen Punkten die DF, EF lothrecht auf AB, AC, so werden diese entweder innerhalb des Dreyecks ABC, oder auf der Linie BC, oder ausserhalb des Dreyecks ABC zusammentreffen. Gesezt sie treffen erst innerhalb des Dreyecks in dem Punkte F zusammen, so ziehe man BF, FC, FA.



Beweis. Da die AD der DB gleich, die DF aber beyden gemeinschaftlich und auf beyden lothrecht ist, so ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie AF der Grundlinie FB gleich. Eben so kann aber auch gezeigt werden, dass die CF der AF gleich sey; folglich ist die CF auch der FB, und mithin sind alle drey FA, FB, FC einander gleich, folglich gehet der aus dem Mittelpunkte F mit der Weite FA, FB oder FC beschriebene Kreis auch durch die übrigen Punkte, und ist also (4, 6. Erkl.) der um das Dreyeck ABC beschriebene Kreis.

Gesezt aber *zweytens* die Linien DF, BF treffen auf der Linie BC in dem Punkte F, wie in der zweyten Figur, zusammen, so kann, wenn man noch die Linie AF zieht,

zicht, eben so gezeigt werden, dass der Punkt F der Mittelpunkt des um das Dreyeck ABC zu beschreibenden Kreises sey.



Gesezt aber *drittens* die Linien DF, EF treffen ausserhalb des Dreyecks ABC in dem Punkte F, wie in der dritten Figur, zusammen, so ziehe man noch die Linien AF, FB, FC,

Da nun wiederum die AD der DB gleich, die DF aber beyden gemeinschaftlich und auf beyden lothrecht ist, so ist, (1, 4. S.) auch die Grundlinie AF der Grundlinie BF gleich. Eben so kann aber auch gezeigt werden, dass die CF der FA gleich sey; folglich ist die CF auch der BF gleich, und mithin gehet wiederum der aus dem Mittelpunkte F, mit der Weite FA, FB, FC beschriebene Kreis auch durch die übrigen Punkte, und ist um das Dreyeck ABC beschrieben. Man beschreibe also diesen Kreis ABC wirklich, so ist um das gegebene Dreyeck ABC ein Kreis beschrieben worden, w. z. v. w.

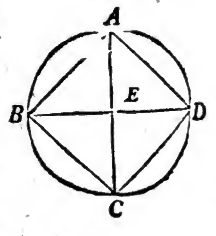
Zusaz. Hieraus erhellet, dass, wenn der Mittelpunkt des Kreises innerhalb des Dreyecks fällt, alsdann der Winkel BAC, als Winkel in einem Abschnitte, der grösser, als der Halbkreis ist, kleiner, als ein rechter, dass aber wenn der Mittelpunkt des Kreises in die Linie BC fällt, dieser Winkel, als Winkel im Halbkreise, ein rechter, und dass er, wenn der Mittelpunkt des Kreises ausserhalb des Dreyecks ABC fällt, als Winkel in einem Abschnitte, der kleiner, als der Halbkreis, ist, grösser, als ein rechter, sey; und umgekehrt, dass wenn der genannte Winkel, kleiner, als ein rechter, ist, die Linien DF, EF innerhalb des Dreyecks, wenn er aber ein rechter, ist, auf der Linie BC, und wenn er grösser, als ein rechter, ist, ausserhalb des Dreyecks zusammentreffen.

6. *Saz.*

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu beſchreiben.

Es ſey der gegebene Kreis ABCD, und man ſoll in denſelben ein Quadrat beſchreiben.

Auflöſung. Man ziehe (1, 11. S.) des Kreiſes ABCD Durchmeſſer AC, BD lothrecht auf einander, und ziehe die Linien AB, BC, CD, DA.



Beweis. Da die BE der ED gleich iſt, denn E iſt des Kreiſes Mittelpunkt, und da die EA den beyden gemeinſchaftlich, und auf beyden lothrecht iſt, ſo iſt (1, 4. S.) auch die Grundlinie AB der Grundlinie AD gleich. Aus eben den Gründen aber iſt auch jede der beyden BC, CD, einer jeden der beyden AB, AD gleich, und folglich ABCD gleichſeitig.

Ich behaupte aber, daſs es auch rechtwinkelig ſey. Denn da die Linie BD ein Durchmeſſer des Kreiſes ABCD iſt, ſo iſt BAD ein Halbkreis, folglich der Winkel BAD (3, 31. S.) ein rechter. Aus gleichen Gründen aber iſt auch jeder der Winkel ABC, BCD, CDA ein rechter, und folglich ABCD eine rechtwinkelige vierſeitige Figur. Es iſt aber gezeigt worden, daſs ſie auch gleichſeitig ſey; folglich iſt ſie ein Quadrat. Auch iſt ſie in den Kreis ABCD beſchrieben.

Demnach iſt in den gegebenen Kreis ABCD das Quadrat ABCD beſchrieben worden, w. z. v. w.

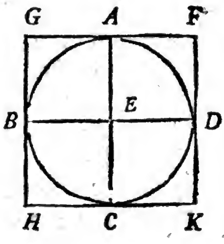
7. *Saz.*

Aufgabe. Um einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu beſchreiben.

Es ſey der gegebene Kreis ABCD, und man ſoll um denſelben ein Quadrat beſchreiben.

Auf-

Auflösung. Man ziehe die Durchmesser AC, BD des Kreises ABCD lothrecht auf einander, und durch die Punkte A, B, C, D ziehe man (3, 17. S.) die Tangenten FG, GH, HK, KF eben dieses Kreises.



Beweis. Da die FG den Kreis ABCD berührt, und von dem Mittelpunkte E des Kreises an den Berührungspunkt A die FA gezogen ist, so sind (3, 18. S.) die Winkel bey A rechte Winkel. Aus eben den Gründen aber sind auch die Winkel bey B, C, D rechte. Und da der Winkel AEB, und eben so auch der Winkel EBG ein rechter ist; so ist (1, 28. S.) die GH der AC parallel. Aus eben den Grunden aber ist auch die AC der KF parallel. Eben so kann nun gezeigt werden, dass auch die beyden FG, KH der BED parallel seyen; folglich sind GK, GC, AK, FB, BK Parallelogramme, und mithin ist (1, 34. S.) die GF der HK, und die GH der FK gleich. Und da die AC der BD, aber auch einer jeden der beyden GH, FK, und die BD einer jeden der beyden GF, HK gleich ist, so ist auch jede der beyden GH, FK einer jeden der beyden GF, HK gleich, und folglich die vierseitige Figur FGHK gleichseitig. Ich behaupte aber, dass sie auch rechtwinkelig sey. Denn da GBEA ein Parallelogramm und der Winkel AEB ein rechter Winkel ist; so ist (1. 34. S.) auch der Winkel AGB ein rechter. Eben so kann aber gezeigt werden, dass auch bey den Punkten F, K, H rechte Winkel seyen; folglich ist die vierseitige Figur rechtwinkelig. Es ist aber gezeigt worden, dass sie auch gleichseitig sey; folglich ist sie ein Quadrat; auch ist sie um den Kreis ABCD beschrieben worden.

Demnach ist um den gegebenen Kreis ein Quadrat beschrieben, w. z. v. w.

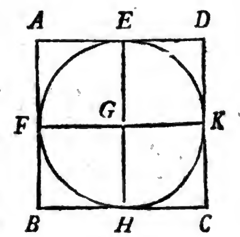
8. *Saz.*

Aufgabe. In ein gegebenes Quadrat einen Kreis zu beschreiben.

Es

Es sey das gegebene Quadrat ABCD, und man soll in dasselbe einen Kreis beschreiben.

Auflösung. Man halbire (1, 10. S.) jede der beyden AB, AD in den Punkten F, E und durch den Punkt E ziehe man (1, 31. S.) der AB oder DC die EH, durch den Punkt F aber der AD oder BC die FK parallel, so sind AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD Parallelogramme, und ihre Gegenseiten (1, 34. S.) bekanntlich einander gleich.



Beweis. Da nun die AB der AD gleich, die AE aber die Hälfte von AD, und die AF die Hälfte von AB ist, so ist auch die AE der AF gleich, und folglich sind auch ihre Gegenseiten einander gleich, es ist also auch die FG der GE gleich. Eben so kann aber gezeigt werden, daſs auch jede der beyden GH, GK einer jeden der beyden FG, GE gleich sey, folglich sind alle vier GF, GE, GH, GK einander gleich, und mithin gehet der Kreis, der aus dem Mittelpunkte G mit der Weite einer von den vieren GF, GE, GH, GK beschrieben wird, auch durch die übrigen Punkte, und berührt die geraden Linien AB, BC, CD, DA, weil bey den Punkten E. F, H, K rechte Winkel sind. Denn wenn dieser Kreis die geraden Linien AB, BC, CD, DA, schneiden sollte, so müſste ein auf dem Durchmesser des Kreises in seinem Endpunkte aufgestelltes Loth innerhalb des Kreises fallen, welches (3, 16. S.) unmöglich ist Folglich schneidet der aus dem Mittelpunkte G mit der Weite GE, GF, GH, oder GK beschriebene Kreis, die geraden Linien AB, BC, CD, DA nicht; er berührt sie also und ist (4, 5. Erkl.) in das Quadrat ABCD beschrieben.

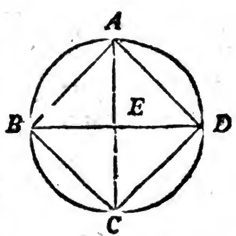
Demnach ist in ein gegebenes Quadrat ein Kreis beschrieben worden, w. z. v. w.

9. *Saz.*

Aufgabe. Um ein gegebenes Quadrat einen Kreis zu beschreiben.

Es

Es sey das gegebene Quadrat ABCD, und man soll um dasselbe einen Kreis beschreiben.



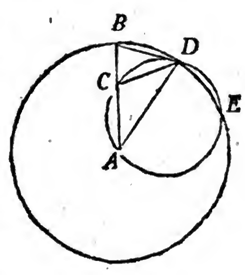
Auflösung und *Beweis.* Man ziehe die Diagonalen AC, BD, welche einander in dem Punkte E schneiden. Da nun die DA der AB gleich, die AC aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden DA, AC den beyden BA, AC stückweise gleich. Auch ist die Grundlinie DC der Grundlinie BC gleich; folglich ist auch der Winkel DAC dem Winkel BAC gleich, und der Winkel DAB wird also von der Linie AC halbirt. Eben so kann aber gezeigt werden, dass auch jeder der Winkel ABC, BCD, CDA von den Linien AC, BD halbirt werde. Da nun der Winkel DAB dem Winkel ABC gleich, der Winkel EAB aber die Hälfte von DAB, und der Winkel EBA die Hälfte von ABC ist, so ist auch der Winkel EAB dem Winkel EBA, und mithin (1, 16. S.) die Seite EA der Seite EB gleich; folglich sind die vier Linien EA, EB, EC, ED alle einander gleich, und der aus dem Mittelpunkte E mit der Weite EA, EB, EC oder ED beschriebene Kreis gehet folglich auch durch die übrigen Punkte, und ist um das Quadrat ABCD beschrieben. Man beschreibe also den Kreis ABCD, so ist um das gegebene Quadrat ein Kreis beschrieben worden, w. z. v. w.

10. *Saz.*

Aufgabe. Ein gleicschenkeliges Dreyeck zu beschreiben, in welchem jeder Winkel an der Grundlinie doppelt so grofs sey, als der dritte Winkel.

Auflösung. Man ziehe eine gerade Linie AB und schneide sie (2, 11. S.) in dem Punkte C so, dass das Rechteck aus AB, BC dem Quadrate von AC gleich sey; hierauf beschreibe man aus dem Mittelpunkte A und mit der Weite AB den Kreis BDE, trage (4, 1. S.) in denselben

ben die der AC, welche nicht gröſſer, als des Kreiſes BDE Durchmeſſer, iſt, gleiche Linie BD, ziehe noch die Linien DA, DC, und beſchreibe (4, 5. S.) um das Dreyeck ADC den Kreis ACD.



Beweis. Da das Rechteck aus AB, BC dem Quadrate von AC, die AC aber der BD gleich iſt, ſo iſt das Rechteck aus AB, BC auch dem Quadrate von BD gleich. Da ferner von einem auſſerhalb des Kreiſes ACD befindlichen Punkte B, zwey gerade Linien BCA, BD an den Kreis ACD gehen, wovon die eine ihn ſchneidet, die andere aber ihn trifft, und das Rechteck aus AB, BC dem Quadrate von BD gleich iſt, ſo berührt (3, 37. S.) die BD den Kreis ACD. Da aber die BD den Kreis ACD berührt, und von dem Berührungspunkte D aus die DC an den Kreis gehet, ſo iſt (3, 32. S.) der Winkel BDC dem Winkel DAC in dem verwechſelten Kreisabſchnitte gleich. Da nun der Winkel BDC dem Winkel DAC gleich iſt, ſo ſeze man beyderſeits den Winkel CDA hinzu, und es iſt der ganze Winkel BDA den zwey Winkeln DAC, CDA gleich. Den beyden Winkeln CDA, DAC aber iſt (1, 32. S.) der äuſſere Winkel BCD gleich; folglich iſt auch der Winkel BDA dem Winkel BCD gleich. Aber der Winkel BDA iſt (1, 5. S.) dem Winkel CBD gleich, weil die Seite AD der Seite AB gleich iſt; folglich iſt auch der Winkel DBA dem Winkel BCD gleich, und mithin ſind die drey Winkel BDA, DBA, BCD alle einander gleich. Da nun der Winkel DBC dem Winkel BCD gleich iſt, ſo iſt (1, 6. S.) auch die Seite BD der Seite DC gleich; die BD aber iſt, nach der Vorausſezung, der CA gleich; folglich iſt auch die CA der CD, und (1, 5. S.) der Winkel CDA dem Winkel DAC gleich, mithin ſind die Winkel CDA und DAC zuſammen dem Doppelten von DAC gleich. Aber der Winkel BCD iſt (1, 32. S.) auch den Winkeln CDA, DAC zuſammen gleich;

gleich; folglich ist auch der Winkel BCD das Doppelte von *D*AC. *D*er Winkel BC*D* ist aber auch einem jeden der Winkel B*D*A, *D*BA gleich; folglich ist jeder der Winkel B*D*A, *D*BA das Doppelte des Winkels *D*AB.

Demnach ist ein gleichseitiges Dreyeck A*D*B beschrieben worden, worin jeder der Winkel an der Grundlinie *D*B das Doppelte des übrigen Winkels ist; w. z. v. w.

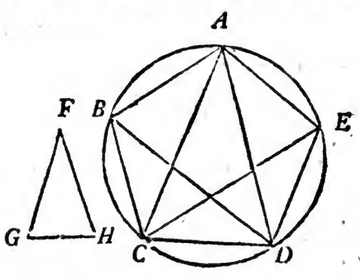
11. *Saz.*

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck zu beschreiben.

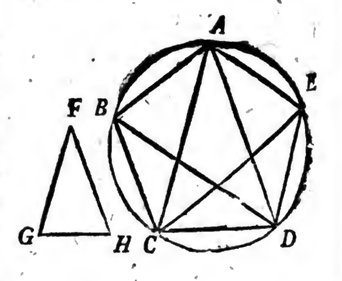
Es sey der gegebene Kreis ABC*D*E, und man soll in denselben ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck beschreiben.

Auflösung. Man beschreibe (4, 10. S.) ein gleichschenkeliges Dreyeck FGH, worin jeder der Winkel an der Grundlinie das Doppelte des dritten Winkels sey. Hierauf beschreibe man (4, 2. S.) in den Kreis ABC*D*E ein Dreyeck AC*D* dem Dreyecke FGH gleichwinkelig, so dass der Winkel CA*D* dem Winkel bey F, jeder der Winkel AC*D*, A*D*C aber einem jeden der Winkel bey G, H gleich sey, so ist jeder der Winkel AC*D*, *AD*C das Doppelte des Winkels C*AD*; man halbire also (1, 9. S.) die beyden Winkel *A*C*D*, *AD*C durch die geraden Linien CE, *D*B und ziehe die Linien *A*B, BC, *D*E, E*A*.

Beweis. Da nun jeder der Winkel *ACD*, *AD*C das Doppelte des Winkels C*AD* ist, und da die Winkel *A*C*D*, *AD*C durch die Linien EC, *D*B halbirt sind, so sind die fünf Winkel CAD, *A*CE, ECD, CDB, BD*A* alle einander gleich. Aber gleiche Winkel stehen (3, 26. S.) auf gleichen Bogen; folglich sind auch die fünf



Bo-



Bogen, AB, BC, CD, DE, EA einander gleich. Gleiche Bogen aber werden (3, 29. S.) von gleichen geraden Linien abgeſchnitten; folglich ſind auch die fünf geraden Linien AB, BC, CD, DE, EA einander gleich, und die fünfſeitige Figur ABCDE iſt alſo gleichſeitig. Ich behaupte aber, daſs ſie auch gleichwinkelig ſey. Denn da der Bogen AB dem Bogen DE gleich iſt, ſo iſt, wenn man beyderſeits den Bogen BCD hinzuſezt, der Bogen ABCD dem Bogen EDCB gleich. Nun ſtehet auf dem Bogen ABCD der Winkel AED, uud auf dem Bogen EDCB der Winkel BAE, folglich iſt (3, 27. S.) auch der Winkel AED dem Winkel BAE gleich. Aus eben den Gründen aber iſt auch jeder der Winkel ABC, BCD, CDE einem jeden der beyden BAE, AED gleich; folglich iſt die fünfſeitige Figur ABCDE gleichwinkelig. Es iſt aber gezeigt worden, daſs ſie auch gleichſeitig ſey; folglich iſt in den gegebenen Kreis ein gleichſeitiges und gleichwinkeliges Fünfeck beſchrieben worden, w. z. v. w.

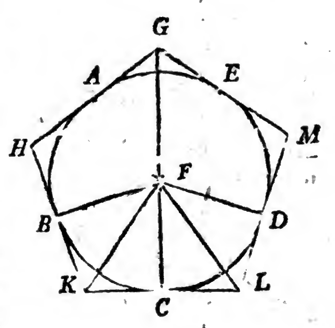
12. *Saz.*

Aufgabe. Um einen gegebenen Kreis ein gleichſeitiges und gleichwinkeliges Fünfeck zu beſchreiben.

Es ſey der gegebene Kreis ABCDE, und man ſoll um denſelben ein gleichſeitiges und gleichwinkeliges Fünfeck beſchreiben.

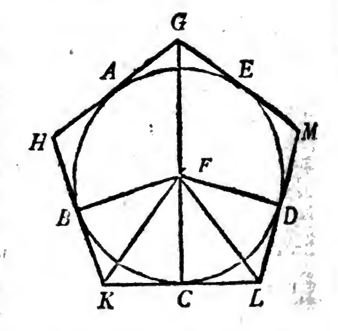
Auflöſung. Man gedenke ſich die Winkelpunkte A, B, C, D, E des (4, 11. S.) in den Kreis beſchriebenen Fünfecks, ſo daſs die Bogen AB, BC, CD, DE, EA einander gleich ſeyen, und durch die Punkte A, B, C, D, E ziehe man (3, 17. S.) die Tangenten GH, HK, KL, LM, MG an den Kreis, alsdann nehme man des Kreiſes ABCDE

ABCDE Mittelpunkt F, und ziehe die FB, FK, FC, FL, FD.



Beweis. Da die gerade Linie KL den Kreis ABCDE in dem Punkte C berührt, und von des Kreises Mittelpunkte F an den Berührungspunkt C die FC gezogen ist, so ist (3, 18. S.) die FC auf der KL lothrecht, und folglich jeder der beyden Winkel bey C ein rechter. Aus eben den Gründen aber sind auch die Winkel bey B, D rechte. Da also der Winkel FCK ein rechter ist, so ist (1, 47. S.) das Quadrat von KF, den Quadraten von FC, CK gleich. Aus eben den Gründen aber ist das Quadrat von FK den Quadraten von FB, BK gleich; und folglich sind die Quadrate von FC, CK den Quadraten von FB, BK gleich. Unter diesen aber ist das Quadrat von FB dem Quadrate von FC gleich; folglich ist auch, wenn man beyderseits gleiches abzieht, das Quadrat von CK dem Quadrate von BK, und also auch die CK der BK, gleich. Da nun auch die FC der FB gleich, und FK gemeinschaftlich ist, so sind die beyden FC, FK den beyden FB, FK stückweise gleich, auch ist die Grundlinie BK der Grundlinie CK gleich; folglich ist (1, 8. S.) auch der Winkel BEK dem Winkel KFC, und der Winkel BKF dem Winkel CKF gleich, und mithin ist der Winkel BFC das Doppelte des Winkels KFC, und der Winkel EKC das Doppelte des Winkels CKF. Aus eben den Gründen aber ist auch der Winkel CFD das Doppelte des Winkels CFL, und der Winkel CL*D* das Doppelte des Winkels CLF. Da nun der Bogen BC dem Bogen C*D* gleich ist, so ist (3, 27. S.) auch der Winkel BFC dem Winkel CFD gleich; der Winkel BFC aber ist das Doppelte des Winkels KFC, und der Winkel DFC das Doppelte des Winkels LFC; folglich ist auch der Winkel

KFC



KFC dem Winkel CFL gleich, und mithin sind in den beyden Dreyecken FKC, FLC zwey Winkel des einen zwey Winkeln des andern stückweise gleich und eine Seite des einen, ist einer Seite des andern gleich, nämlich die gemeinschaftliche Seite FC; folglich sind (1, 26. S.) auch die übrigen Seiten des einen den übrigen Seiten des andern, und der übrige Winkel des einen dem übrigen Winkel des andern gleich, die Linie KC also ist der Linie CL, und der Winkel FKC dem Winkel FLC gleich. Da nun die KC der CL gleich ist, so ist KL das Doppelte von KC. Eben so kann aber gezeigt werden, dass auch HK das Doppelte von BK sey. Da ferner gezeigt worden ist, dass die BK der KC gleich sey, und die KL das Doppelte von KC, die KH aber das Doppelte von BK ist, so ist auch die KH der KL gleich. Eben so kann auch gezeigt werden, dass jede der übrigen GH, GM, ML einer jeden der beyden KH, KL gleich sey; folglich ist GHKLM ein gleichseitiges Fünfeck.

Ich behaupte aber, dass es auch gleichwinkelig sey.

Denn da der Winkel FKC dem Winkel FLC gleich ist, von dem Winkel FKC aber gezeigt worden ist, dass er die Hälfte des Winkels HKL, von dem Winkel FLC aber, dass er die Hälfte des Winkels KLM sey, so ist auch der Winkel HKL dem Winkel KLM gleich. Eben so kann aber gezeigt werden, dass auch jeder der Winkel KHG, HGM, GML einem jeden der Winkel HKL, KLM gleich sey; folglich sind die fünf Winkel GHK, HKL, KLM, LMG, MGH alle einander gleich, und mithin ist das Fünfeck GHKLM gleichwinkelig. Es ist aber gezeigt worden, dass es auch gleichseitig sey, auch ist es um den Kreis ABCDE beschrieben.

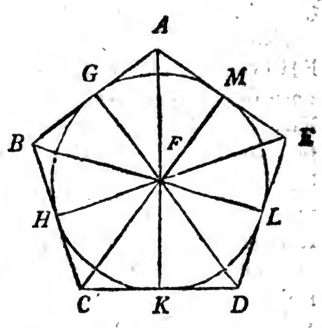
Demnach ist um einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck beschrieben worden, w. z. v. w.

13. *Saz.*

13. *Saz.*

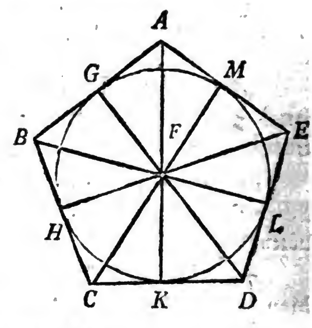
Aufgabe. In ein gegebenes gleichſeitiges und gleichwinkeliges Fünfeck einen Kreis zu beſchreiben.

Es ſey das gegebene gleichſeitige und gleichwinkelige Fünfeck ABCDE, und man ſoll in daſſelbe einen Kreis beſchreiben.



Auflöſung und *Beweis.* Man halbire (1, 9. S.) die Winkel BCD, CDE durch die Linien CF, DF, und ziehe aus dem Punkte F, wo die Linien CF, DF zuſammentreffen, die FB, FA, FE.

Da nun die BC der CD gleich, die CF aber gemeinſchaftlich iſt, ſo ſind die beyden BC, CF den beyden DC, CF ſtückweiſe gleich, auch iſt der Winkel BCF dem Winkel DCF gleich, folglich iſt (1, 4. S.) auch die Grundlinie BF der Grundlinie CF, und das ganze Dreyeck BFC dem ganzen Dreyecke CFD gleich, auch ſind in beyden die Winkel, welche gleichen Seiten gegenüberliegen, einander gleich; der Winkel CFB iſt alſo dem Winkel CDF gleich. Da nun der Winkel CDE das Doppelte des Winkels CDF iſt, der Winkel CDE aber dem Winkel ABC, und der Winkel CDF dem Winkel CBF gleich iſt, ſo iſt auch der Winkel ABC das Doppelte von CBF, und mithin der Winkel ABF dem Winkel FBC gleich; folglich der Winkel ABC durch die Linie BF halbirt. Eben ſo kann aber gezeigt werden, daſs auch jeder der Winkel BAE, AED von den Linien FA, FE halbirt werde. Man fälle nun von dem Punkte F aus auf die Linien AB, BC, CD, DE, EA, die Lothe FG, FH, FK, FL, FM. Da nun der Winkel HCF dem Winkel KCF, und der rechte Winkel FHC dem rechten Winkel FKC gleich iſt, ſo ſind in den beyden Dreyecken FHC, FKC zwey und



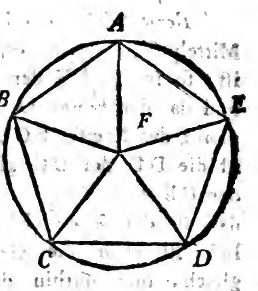
zwey Winkel einander stückweise gleich, auch haben beyde eine Seite gemeinschaftlich, die F C nämlich, welche in jedem einem der gleichen Winkel gegenüberliegt; folglich sind (1, 26. S.) auch in beyden die übrigen Seiten einander stückweise gleich, es ist also das Loth FH dem Lothe FK gleich. Eben so kann aber gezeigt werden, dass auch jede der Linien FL, FM, FG einer jeden der beyden FH, FK gleich sey, folglich sind die fünf geraden Linien FG, FH, FK, FL, FM alle einander gleich, und der aus dem Mittelpunkte F und mit der Weite einer dieser fünf Linien beschriebene Kreis gehet folglich auch durch die Endpunkte der übrigen, und berührt also die Linien AB, BC, CD, DE, EA weil bey den Punkten G, H, K, L, M rechte Winkel sind. Denn sollte er sie nicht berühren, sondern schneiden, so würde ein auf dem Durchmesser des Kreises in seinem Endpunkte aufgestelltes Loth innerhalb des Kreises fallen, welches (3, 16. S.) unmöglich ist. Folglich kann der aus dem Mittelpunkte F mit der Weite FG, FH, FK, FL, FM beschriebene Kreis die Linien AB, BC, CD, DE, EA nicht schneiden, er muss sie also berühren. Man beschreibe also einen solchen Kreis wie GHKLM, so ist in das gegebene gleichseitige und gleichwinkelige Fünfeck ein Kreis beschrieben worden, w. z. v. w.

14. *Saz.*

Aufgabe. Um ein gegebenes gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck einen Kreis zu beschreiben.

Es sey das gegebene gleichseitige und gleichwinkelige Fünfeck ABCDE, und man soll um dasselbe einen Kreis beschreiben.

Auf-



Auflösung und *Beweis*. Man halbire jeden der Winkel BCD, CDE durch die Linien CF, DF, und ziehe von dem Punkte F, wo diese Linien zusammentreffen, die Linien FB, FA, FE, so kann eben so, wie im Beweise des vorigen Sazes, gezeigt werden, dass auch jeder der Winkel CBA, BAE, AED durch die Linien FB, FA, FE halbirt werde. Da nun der Winkel BCD dem Winkel CDE gleich, der Winkel FCD aber die Hälfte des Winkels BCD, und der Winkel CDF die Hälfte des Winkels CDE ist, so ist folglich auch der Winkel FDC dem Winkel FCD, und mithin (1, 6. S.) die Seite FC der Seite FD gleich. Eben so kann aber gezeigt werden, dass auch jede der Linien FB, FA, FE einer jeden der beyden FC, FD gleich sey. Demnach sind die fünf Linien FA, FB, FC, FD, FE alle einander gleich, und mithin gehet der aus dem Mittelpunkte F mit der Weite einer dieser fünf Linien beschriebene Kreis auch durch die übrigen Punkte, und ist um das gleichseitige und gleichwinkelige Fünfeck beschrieben. Man beschreibe also den Kreis ABCDE, so ist um das gleichseitige und gleichwinkelige Fünfeck ein Kreis beschrieben worden, w. z. v. w.

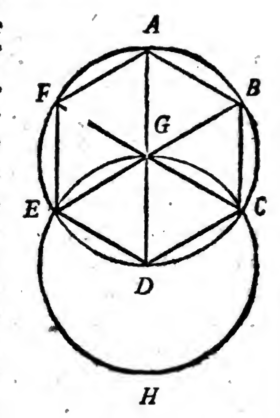
14. *Saz.*

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Sechseck zu beschreiben.

Es sey der gegebene Kreis ABCDEF, und man soll in denselben ein gleichseitiges u. gleichwinkeliges Sechseck beschreiben.

Auflösung. Man nehme den Mittelpunkt G des Kreises, und ziehe den Durchmesser AD desselben; hierauf beschreibe man aus dem Mittelpunkte D mit der Weite DG den Kreis EGCH, in diesem ziehe man die geraden Linien EG, CG, verlängere solche bis nach B, F und ziehe sodann die AB, BC, CD, DE, EF, FA, so behaupte ich, dass ABCDEF ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Sechseck sey.

Be-



Beweis. Da der Punkt G der Mittelpunkt des Kreises ABCDEF ist, so ist die GE der GD gleich, und da der Punkt D der Mittelpunkt des Kreises EGCH ist, so ist die DE der DG gleich. Von der GE aber ist gezeigt worden, dass sie der GD gleich sey; folglich ist auch die GE der ED gleich, und mithin das Dreyeck EGD gleichseitig, folglich auch seine drey Winkel EGD, EDG, DEG einander gleich, weil in gleichschenkeligen Dreyecken (1, 5. S.) die Winkel an der Grundlinie einander gleich sind. Auch sind die Winkel eines Dreyecks zwey rechten gleich; folglich ist der Winkel EGD ein Drittel von zwey rechten. Eben so kann aber gezeigt werden, dass auch der Winkel DGC ein Drittel von zwey rechten sey. Da ferner die gerade Linie CG auf der EB aufgestellt ist, so sind (1, 13. S.) die Nebenwinkel EGC, CGB, welche sie mit derselben macht, zwey rechten gleich, folglich ist auch der dritte Winkel CGB ein Drittel von zwey rechten, und mithin sind die Winkel EGD, DGC, CGB einander gleich; folglich sind auch (1, 15. S.) die Scheitelwinkel dieser, BGA, AGF, FGE einander gleich, und mithin sind die sechs Winkel, EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE alle einander gleich. Gleiche Winkel aber stehen (3, 26. S.) auf gleichen Bogen; folglich sind die sechs Bogen AB, BC, CD, DE, EF, FA alle einander gleich. Gleiche Bogen aber werden (3, 29. S.) von gleichen geraden Linien abgeschnitten; folglich sind auch die sechs gerade Linien, die gleiche Namen haben, alle einander gleich, und mithin ist ABCDEF ein gleichseitiges Sechseck.

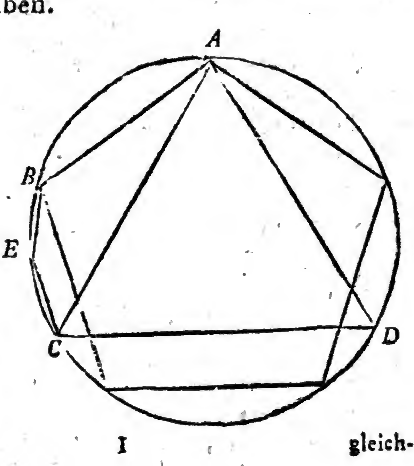
Ich behaupte aber, dass es auch gleichwinkelig sey. Denn da der Bogen AF dem Bogen ED gleich ist, so ist, wenn man bey-

beyderseis den Bogen A B C D hinzusezt, der Bogen F A B C D dem Bogen E D C B A gleich. Nun stehet auf dem Bogen E A B C D der Winkel F E D, und auf dem Bogen E D C B A der Winkel A F E; folglich ist (3, 27. S.) der Winkel A F E dem Winkel D E F gleich. Ebenso kann aber gezeigt werden, dass auch die übrigen Winkel des Sechsecks A B C D E F stückweise jedem der beyden A F E, F E D gleich seyen, folglich ist A B C D E F gleichwinkelig. Es ist aber gezeigt worden, dass es auch gleichseitig sey, auch ist es in den Kreis A B C D E F beschrieben. Demnach ist in einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Sechseck beschrieben, w. z. v. w.

Zusaz. Hieraus erhellet, dass die Seite des Sechsecks dem Halbmesser des Kreises gleich sey. Ferner wenn man durch die Punkte A, B, C, D, E, F Tangenten des Kreises zieht, so kann auf ähnliche Art, wie bey dem Fünfeck gezeigt worden ist, um einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Sechseck, und in und um ein gegebenes Sechseck ein Kreis beschrieben werden.

16. *Saz.*

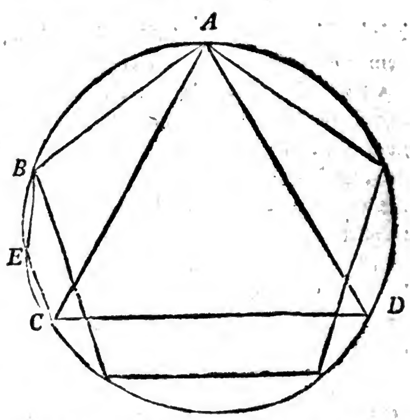
Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfzehneck zu beschreiben.



Es sey der gegebene Kreis A B C D, u. man soll in denselben ein gleichseitiges u. gleichwinkeliges Fünfzehneck beschreiben.

Auflösung u. *Beweis.* Man beschreibe in den Kreis A B C D die Seite A C des (4, 2. S.) in denselben einzuschreibenden gleich-

gleichseitigen Dreyecks, und die Seite AB des (4, 11. S.) in denselben einzuschreibenden gleichseitigen Fünfecks. Nun enthält der Bogen ABC, als das Drittel des ganzen Kreises, fünf solcher Abschnitte, dergleichen der ganze Kreis funfzehn enthält. Der Bogen AB aber, als das Fünftel des ganzen Kreises, enthält drey dieser Abschnitte; folglich enthält der Bogen BC zwey derselben. Man halbire daher (3, 30. S.) den Bogen BC in dem Punkte E, so ist sowohl BE als EC ein Fünfzehntel des ganzen Kreises ABCD. Wenn man daher die Linien BE, EC ziehet, und solche die ihnen gleich sind in *Einem* fort in dem Kreise herumträgt, so wird in denselben ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfzehneck beschrieben werden, w. z. v. w.



Zusaz. Eben so wie beym Fünfecke gezeigt worden ist, wird auch ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Funfzehneck um einen gegebenen Kreis, wie auch in und um ein gegebenes gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfzehneck ein Kreis beschrieben.

EUKLIDS ELEMENTE.

FUENFTES BUCH.

Erklärungen.

1. Eine Gröſse ist ein *Theil* von einer andern, die kleinere von der gröſseren, wenn die kleinere die gröſsere miſst.
2. Die gröſsere ist ein *Vielfaches* der kleinern, wenn die kleinere die gröſsere miſst,
3. Das *Verhältniſs* (*ratio*) ist eine gegenſeitige Beziehung, welche zwey gleichartige Gröſsen in Anſehung ihrer Vielfachen auf einander haben.
4. Man ſagt, Gröſsen *ſtehen im Verhältniſſe* mit einander, wenn ſie vervielfältigt einander übertreffen können.
5. Man ſagt, Gröſsen ſtehen in *einerley* Verhältniſſe, die erſte zur zweyten und die dritte zur vierten, wenn jede Gleichvielfache der erſten und dritten zugleich gröſser, eben ſo groſs, oder kleiner ſind, als jede Gleichvielfache der zweyten und vierten.
6. Gröſsen, welche einerley Verhältniſs haben, heiſsen *proportionirt*.

7. Wenn aber unter den Gleichvielfachen das Vielfache der ersten grösser ist, als das Vielfache der zweyten, aber das Vielfache der dritten nicht grösser, als das Vielfache der vierten, alsdann sagt man, die erste habe zur zweyten ein *grösseres* Verhältniss, als die dritte zur vierten.

8. Die *Proportion* (*proportio*) ist die Gleichheit der Verhältnisse.

9. Eine Proportion bestehet zum wenigsten aus drey Gliedern.

10. Wenn drey Grössen proportionirt sind, so sagt man, die erste habe zur dritten ein *zweymal höheres* (*duplicirtes*) Verhältniss, als die erste zur zweyten.

11. Wenn vier Grössen proportionirt sind, so sagt man, die erste habe zur vierten ein *dreymal höheres* (*triplicirtes*) Verhältniss, als zur zweyten, und so fort immer um eins höher, so lange die Proportion Statt findet.

12. Die Vorderglieder heissen den Vordergliedern und die Hinterglieder den Hintergliedern *homolog*.

13. *Verwechselt* (*alterna*) heisst das Verhältniss, wenn man sezt: wie das Vorderglied zum Vordergliede, so das Hinterglied zum Hintergliede.

14. *Umgekehrt* (*inversa*) heisst das Verhältniss, wenn man sezt: wie das Hinterglied zum Vordergliede, so das Hinterglied zum Vordergliede.

15. *Verbindung* (*compositio*) des Verhältnisses ist, wenn man sezt: das Vorderglied sammt dem Hintergliede, als *eins* betrachtet, zu eben demselben Hintergliede.

16.

16. *Trennung* (*diviſio*) des Verhältniſſes iſt, wenn man ſezt: wie der Ueberſchuſs des Vorderglieds über das Hinterglied zu ebendemſelben Hintergliede.

17. *Wiederkehrend* (*converſa*) heiſst das Verhältniſs, wenn man ſezt: wie das Vorderglied zum Ueberſchuſſe des Vorderglieds über das Hinterglied.

18. Verhältniſs aus der *Gleichheit*, oder *gleichförmiges* Verhältniſs, (*ex aequalitate* ſ. *ex aequo*) iſt, wenn man mehrere Gröſſen und noch einmal die nämliche Anzahl anderer hat, und es iſt: wie bey den erſten die erſte zur lezten, ſo auch bey den zweyten die erſte zur lezten, oder wenn man die äuſſeren Glieder mit Uebergehung der mittleren ſezt.

19. *Unzerſtreut* (*ordinata*) heiſst eine Proportion, wenn man hat: wie das Vorderglied zum Hintergliede, ſo das Vorderglied zum Hintergliede, und zugleich: wie das Hinterglied zu einer andern Gröſſe, ſo das Hinterglied zu einer andern Gröſſe.

20. *Zerſtreut* (*perturbata*) heiſst eine Proportion, wenn man drey Gröſſen und noch einmal die nämliche Anzahl anderer hat, und es iſt: wie bey den erſten das Vorderglied zum Hintergliede, ſo auch bey den zweyten das Vorderglied zum Hintergliede, aber, wie bey den erſten Gröſſen das Hinterglied zu einer andern Gröſſe, ſo bey den zweyten eine andere Gröſſe zum Vordergliede.

---

1. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn Gröſſen ſo viel ihrer ſeyn mögen, von eben ſo vielen andern ſtückweiſe gleichvielfach ſind, ſo ſind die erſten alle von den lezten allen ebenſovielfach, wievielfach eine der erſten von einer der lezten iſt.

Es ſeyen Gröſſen, ſo viel ihrer ſeyn mögen, AB, CD, von eben ſo vielen andern E, F ſtückweiſe gleichvielfach, ſo behaupte ich, daſs die Gröſſen AB, CD von den Gröſſen E, F ebenſovielfach ſeyen, als die AB von der E iſt.

Beweis. Weil die AB von der E ebenſovielfach, als die CD von der F, iſt, ſo ſind in der CD ebenſoviele Gröſſen, jede gleich der F, wieviel in der AB Gröſſen, jede gleich der E, ſind. Man theile alſo die AB in die Theile AG, GB, deren jeder der E gleich ſey, und die CD in die Theile CH, HD deren jeder der F gleich ſey, ſo iſt die Menge der Theile CH, HD der Menge der Theile AG, GB gleich. Da nun die AG der E, und die CH der F gleich iſt, ſo ſind auch die AG, CH zuſammen den E, F zuſammen gleich. Aus eben den Gründen iſt aber die GB der E, und die HD der F gleich; folglich ſind auch die GB, HD zuſammen den E, F zuſammen gleich. Wieviel alſo in der AB Theile ſind, deren jeder der E gleich iſt, ſoviel ſind in den AB, CD zuſammen Theile, deren jeder den E, F zuſammen gleich iſt; folglich ſind die AB, CD zuſammen von den E, F zuſammen ebenſovielfach, als die eine AB von der einen E.

Wenn demnach mehrere Gröſſen u. ſ. w. w. z. e. w.

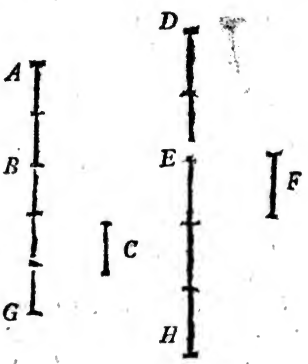
2. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn die erſte Gröſſe von der zweyten ebenſovielfach iſt, als die dritte von der vier-

vierten, und es ist zugleich die fünfte von der zweyten ebensovielfach, als die sechste von der vierten, so sind auch die erste und fünfte zusammen von der zweyten ebensovielfach, als die dritte und sechste zusammen von der vierten.

Es sey die erste AB von der zweyten C ebensovielfach, als die dritte DE von der vierten F, zugleich sey auch die fünfte BG von der zweyten C ebensovielfach, als die sechste EH von der vierten F, so behaupte ich, dass die erste und fünfte zusammen, AG, von der zweyten C ebensovielfach sey, als die dritte und sechste zusammen, DH, von der vierten F.

Beweis. Da die AB von der C ebensovielfach ist als die DE von der F, so sind in der DE eben so viele Grössen, jede gleich der F, als in der AB Grössen, jede gleich der C, sind. Aus eben den Gründen sind auch in der EH eben so viele Grössen, jede gleich der F, als in der BG Grössen, jede gleich der C, sind. Folglich sind auch in der ganzen DH eben so viele Grössen, jede gleich der F, als in der ganzen AG Grössen, jede gleich der C sind, und mithin ist die DH von der F ebensovielfach, als die AG von der C, und es sind also auch die erste und fünfte zusammen, AG, von der zweyten C ebensovielfach, als die dritte und sechste zusammen, DH, von der vierten F.



Wenn demnach die erste Grösse von der zweyten u. s. w. w. z. e. w.

3. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn die erste Grösse von der zweyten ebensovielfach ist, als die dritte von der vierten, und man nimmt Gleichvielfaches der

der ersten und dritten, so ist auch jedes dieser Vielfachen von jenen beyden gleichvielfach, das eine nämlich von der zweyten, das andere von der vierten.

Es sey die erste Grösse A von der zweyten Grösse B ebensovielfach, als die dritte C von der vierten D, und man nehme von den beyden A, C die Gleichvielfachen EF, GH, so behaupte ich, dass auch die EF von der B ebensovielfach sey, als die GH von der D.

Beweis. Da die EF von der A eben so vielfach ist, als die GH von der C, so sind in der GH eben so viele Grössen, jede gleich der C, als in der EF Grössen, jede gleich der A, sind. Man theile also die EF in die Grössen EK, KF, die der A gleich seyen, die GH aber in die Grössen GL, LH die der C gleich seyen, so ist die Menge der Grössen EK, KF der Menge der Grössen GL, LH gleich. Da nun die A von der B ebensovielfach ist, als die C von der D, aber die EK der A, und die GL der C gleich ist, so ist auch die EK von der B ebensovielfach, als die GL von der D. Aus eben den Gründen ist auch die KF von der B ebensovielfach, als die LH von der D. Weil nun die erste EK von der zweyten B ebensovielfach ist, als die dritte GL von der vierten D, aber auch die fünfte KF von der zweyten B ebensovielfach ist, als die sechste LH von der vierten D, so ist (5, 2. S.) die aus der ersten und fünften zusammengesezte EF von der zweyten B ebensovielfach, als die dritte und sechste zusammen, GH von der vierten D.

Wenn demnach die erste Grösse von der zweyten u. s. w. w. z. e. w.

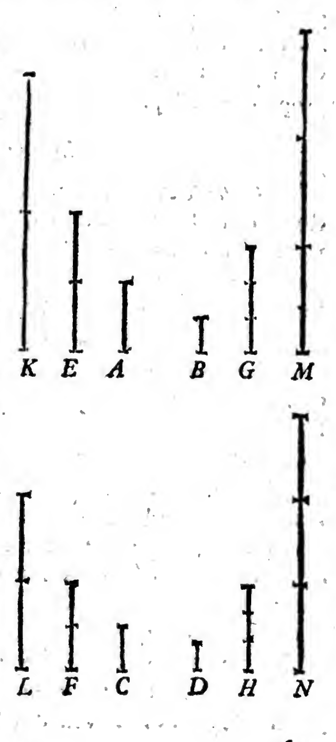
4. *Saz.*

4. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn die erste Grösse zur zweyten sich verhält, wie die dritte zur vierten, so werden auch jede Gleichvielfache der ersten und dritten zu jeden Gleichvielfachen der zweyten und vierten einerley Verhältniss haben.

Es verhalte sich die erste A zur zweyten B wie die dritte C zur vierten D, und man nehme nach Belieben von den Grössen A, C die Gleichvielfachen E, F von den Grössen B, D aber nach Belieben andere Gleichvielfache G, H, so behaupte ich, dass auch die E zu der G sich verhalte wie die F zu der H.

Beweis. Man nehme von den Grössen E, F die Gleichvielfachen K, L und von den Grössen G, H, die Gleichvielfachen M, N. Da nun die E von der A ebensovielfach ist, als die F von der C, und man von den Grössen E, F die Gleichvielfachen K, L genommen hat, so ist (5, 3. S.) die K von der A ebensovielfach, als die L von der C. Aus eben den Gründen ist auch die M von der B ebensovielfach, als die N von der D. Da nun A zu B sich verhält wie C zu D, und man von den Grössen A, C die Gleichvielfachen K, L und von den Grössen B, D nach Belieben andere Gleichvielfache M, N genommen hat, so ist (5, 5. Erkl.) die L zugleich grösser,



ser, eben so gross, oder kleiner, als die N, je nachdem die K grösser, eben so gross, oder kleiner ist, als die M. Auch sind die K, L von den beyden E, F Gleichvielfache, die M, N aber von den G, H nach Belieben andere Gleichvielfache; folglich verhält sich (5, 5. Erkl.) die E zu der G wie die F zu der H.

Wenn demnach die erste Grösse zu der zweyten u. s. w. w. z. e. w.

Zusaz. Da nun gezeigt worden ist, dass je nachdem die K grösser, eben so gross, oder kleiner ist, als die M, auch die L grösser, eben so gross, oder kleiner, als die N, sey, so erhellet, dass auch, je nachdem die M grösser, eben so gross, oder kleiner ist, als die K, auch die N grösser, eben so gross, oder kleiner sey, als die L, und daher verhält sich auch G zu E wie H zu F. Hieraus aber ist klar, dass, wenn vier Grössen proportionirt sind, sie auch umgekehrt proportionirt seyen.

5. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine Grösse von einer andern ebensovielfach ist, als ein Stück der ersten von einem Stücke der zweyten, so ist auch der Rest der ersten vom Reste der zweyten ebensovielfach, als die ganze erste von der ganzen zweyten.

Es sey die Grösse AB von der CD ebensovielfach, als das Stück AE von dem Stücke CF, so behaupte ich, dass auch der Rest EB von dem Reste FD ebensovielfach sey, als die ganze AB von der ganzen CD.

Beweis. Man mache die EB von der CG ebensovielfach, als die AE von der CF ist. Da nun (5, 1. S.) die AE von der CF ebensovielfach ist, als die AB von der GF, und da man sezt, dass die AE von der FC ebensovielfach sey, als die AB von der CD, so ist die AB von den beyden CF, CD gleichvielfach, und daher die GF der CD gleich. Man nehme von den beyden die CF weg, so ist der

der Reſt GC dem Reſte DF gleich. Da nun die AE von der CF ebenſovielfach iſt, als die EB von der CG, und die CG der DF gleich iſt, ſo iſt auch die AE von der CF ebenſovielfach, als die EB von der FD. Nach der Vorausſezung aber iſt die AE von der CF ebenſovielfach, als die AB von der CD; folglich iſt auch der Reſt EB von dem Reſte FD ebenſovielfach, als die ganze AB von der ganzen CD.

Wenn demnach eine Gröſſe von einer andern u. ſ. w. w. z. e. w.

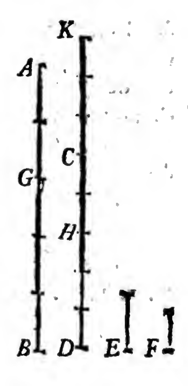
6. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn zwey Gröſſen von zwey andern gleichvielfach ſind, und es ſind auch Stücke der erſten beyden von eben dieſen zwey andern gleichvielfach, ſo ſind auch die Reſte entweder denſelben gleich, oder Gleichvielfache von ihnen.

Es ſeyen zwey Gröſſen AB, CD von zwey andern E, F gleichvielfach, und es ſeyen auch die Stücke AG, CH der erſten beyden von den nämlichen andern E, F gleichvielfach, ſo behaupte ich, daſs auch die Reſte GB, HD entweder den beyden E, F gleich, oder deren Gleichvielfache ſeyen.

Beweis. Es ſey *erſtens* die GB der E gleich, ſo behaupte ich, daſs auch die HD der F gleich ſey. Man mache nämlich die CK per F gleich. Da nun die AG von der E ebenſovielfach iſt, als die CH von der F, und die GB der E die CK aber der F gleich iſt, ſo iſt (5, 2. S.) auch die AB von der E ebenſovielfach, als die KH von der F. Es iſt aber angenommen, daſs die AB von der E ebenſovielfach, als die CD von der F; folglich iſt die KH von der F ebenſovielfach, als die CD. Da nun die beyden KH, CD von der

der F gleichvielfach find, fo ift die KH der CD gleich. Man nehme von beyden die CH weg, fo ift der Reft KC dem Refte HD gleich. Aber die KC ift der F gleich; folglich ift auch die HD der F gleich. Wenn alfo die GB der E gleich ift, fo ift auch die HD der F gleich.



Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, dafs, wenn die GB ein Vielfaches von der E ift, die HD das Gleichvielfache von der F fey.

Wenn demnach zwey Gröffen u. f. w. z. e. w.

7. *Saz.*

Lehrfaz. Gleiche Gröffen haben zu *einer* Gröffe, und *eine* Gröffe hat zu gleichen Gröffen einerley Verhältnifs.

Es feyen zwey gleiche Gröffen A, B und eine andere beliebige Gröffe C, fo behaupte ich, dafs jede der beyden A, B zu der C, und dafs auch die C zu jeder von den beyden A, B einerley Verhältnifs habe.

Beweis. Man nehme von den beyden A, B die Gleichvielfachen D, E, und von der C nach Belieben ein anderes Vielfaches F. Da nun die D von der A ebenfovielfach ift, als die E von der B, und da die A der B gleich ift, fo ift auch die D der E gleich. Es ift aber die F ein anderes beliebiges Vielfaches von der C. Je nachdem alfo die D gröffer, eben fo grofs, oder kleiner ift, als die F, fo ift auch die E gröffer, eben fo grofs, oder kleiner, als die F. Auch find die D, E von den beyden A, B Gleichvielfache, die F aber ift ein anderes beliebige-

liebiges Vielfaches von der C; folglich verhält sich (5, 5. Erkl.) die A zu der C wie die B zu der C.

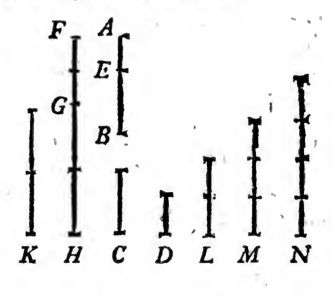
Ich behaupte aber ferner, dass auch die C zu jeder von den beyden A, C einerley Verhältniss habe. Denn nach der nämlichen Construction kann auf ähnliche Art gezeigt werden, dass die D der E gleich, die F aber eine andere Grösse sey. Je nachdem nun die F grösser, eben so gross, oder kleiner ist, als die D, so ist sie auch grösser, eben so gross, oder kleiner, als die E. Auch ist die F ein Vielfaches von der C, die D, E aber sind ander beliebige Gleichvielfache von den beyden A, B; folglich verhält sich (5, 5. Erkl.) die C zu der A wie die C zu der B.

Demnach haben gleiche Grössen u. s. w. w. z. e. w.

8. *Saz.*

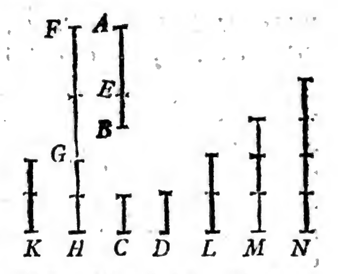
Lehrsaz. Von ungleichen Grössen hat die grössere zu ebenderselben Grösse ein grösseres Verhältniss, als die kleinere, und ebendieselbe Grösse hat zu der kleinern ein grösseres Verhältniss, als zu der grösseren.

Es seyen die ungleichen Grössen AB, C, und zwar sey die AB grösser, als die C, ferner sey eine andere beliebige Grösse D, so behaupte ich, dass die AB zu der D ein grösseres Verhältniss habe, als die C zu der D, und dass die D zu der C ein grösseres Verhältniss habe, als zu der AB.



Beweis. Da die AB grösser ist, als die C, so mache man (1, 3. S.) der C die BE gleich, so wird (5, 4. Erkl.) die kleinere von den beyden AE, EB vervielfältigt einmal grösser werden, als die D. Es sey erstlich die AE kleiner, als die EB, man vervielfältige die AE, bis sie grösser wird, als die D, und es sey die FG das Vielfache von AE, welches grösser ist, als die D, nun mache man die

die GH von der EB und die K von der C ebensovielfach, als die FG von der AE ist. Hierauf nehme man von der D das Doppelte L, das Dreyfache M, und so fort das um eins höhere Vielfache, bis man auf ein Vielfaches von der D kommt,



was zunächst grösser ist, als die K. Man nehme dieses also, und es sey die N das Vierfache von D, und zunächst grösser, als K. Da nun die K zunächst kleiner ist, als die N, so ist die K nicht kleiner, als die M. Und da die FG von der AE ebensovielfach ist, als die GH von der EB, so ist (5, 1. S.) auch die FG von der AE ebensovielfach, als die FH von der AB. Es ist aber die FG von der AE ebensovielfach, als die K von der C; folglich ist auch die FH von der AB ebensovielfach, als die K von der C, und daher sind die FH, K von den beyden AB, C gleichvielfach. Ferner da die GH von der EB ebensovielfach ist, als die K von der C, und die EB der C gleich ist; so ist auch die GH der K gleich. Aber die K ist nicht kleiner, als die M, folglich ist auch die GH nicht kleiner, als die M. Nach der Construction aber ist die FG grösser, als die D; folglich ist auch die ganze FH grösser, als die beyden D, M zusammen. Aber die beyden D, M zusammen sind der N gleich; folglich ist die FH grösser, als die N; die K aber ist nicht grösser, als die N. Auch sind die FH, L Gleichvielfache der beyden AB, C, und die N ist ein anderes beliebiges Vielfaches von der D; folglich hat (5, 7. Erkl.) die AB zu der D ein grösseres Verhältniss, als die C zu der D.

Ich behaupte aber ferner, dass auch die D zu der C ein grösseres Verhältniss habe, als die D zu der AB.

Nach der vorigen Construction kann nämlich auf ähnliche Art gezeigt werden, dass die N zwar grösser sey, als die K, aber nicht grösser, als die FH. Es ist aber N ein Vielfaches von der D, und die FH, K sind andere

Gleich-

Gleichvielfache von den beyden AB, C; folglich hat (5, 7. Erkl.) die D zu der C ein grösseres Verhältniss, als die D zu der AB,

Es sey aber *zweytens* die AE grösser, als die EB, so wird (5, 4. Erkl.) die kleinere EB vervielfältigt einmal grösser, als die D, werden. Man vervielfältige sie, und es sey die GH ein Vielfaches von der EB, aber grösser, als die D. Man mache nun die FG von der AE und die K von der C ebensovielfach, als die GH von der EB ist. Nun kann, auf ähnliche Art wie zuvor, gezeigt werden, dass die FH von der K und die AB von der C Gleichvielfache seyen. Man nehme ferner eben so von der D ein Vielfaches N, was zunächst grösser, als die FG, sey, so ist wiederum die FG nicht kleiner, als die M. Es ist aber die GH grösser, als die D; folglich ist die ganze FH grösser, als die D, M zusammen, das heisst grösser, als die N. Die K aber ist nicht grösser, als die N, weil die FG, welche grösser, als die GH, das heisst, grösser, als die K, ist, doch die N nicht übertrifft. Und so kann auf ähnliche Art, wie zuvor, der Beweis geendiget werden,

Demnach hat von zwey ungleichen Grössen u. s. w. w. z. e. w.

9. *Saz.*

Lehrsaz. Grössen, die zu *einer* dritten einerley Verhältniss haben, sind einander gleich, und solche, zu welchen *eine* dritte einerley Verhältniss hat, sind auch einander gleich.

Es habe jede der beyden Grössen A, B zu der dritten C einerley Verhältniss, so behaupte ich, dass die A der B gleich sey.

Beweis. Denn wäre sie ihr nicht gleich, so hätten (5, 8. S.) nicht die beyden A, B zu der dritten C einerley Verhältniss. Dies haben sie aber; folglich ist die A der B gleich.

A C B

Es habe ferner die C zu den beyden A, B einerley Verhältniss, so behaupte ich, dass die A der B gleich sey.

Denn

Denn wäre sie es nicht, so hätte (5, 8. S.) nicht die C zu den beyden A, B einerley Verhältniss. Dies hat sie aber; folglich ist die A der B gleich.

Grössen also, die zu *einer* dritten u. s. w. w. z. e. w.

10. *Saz.*

Lehrsaz. Von Grössen, die zu einerley Grösse ein Verhältniss haben, ist diejenige die grössere, welche das grössere Verhältniss hat; diejenige aber, zu welcher einerley Grösse ein grösseres Verhältniss hat, ist die kleinere.

Es habe die A zu der C ein grösseres Verhältniss, als die B zu der C, so behaupte ich, dass die A grösser, als die B, sey.

Beweis. Denn wenn dies nicht wäre, so ist entweder die A der B gleich, oder sie ist kleiner, als sie. Nun kann die A der B nicht gleich seyn, da sonst (5, 7. S.) die beyden A, B, zu der dritten C einerley Verhältniss hätten. Dies haben sie aber nicht; folglich ist auch die A der B nicht gleich. Aber die A ist auch nicht kleiner, als die B, denn sonst hätte (5, 8. S.) die A zu der C ein kleineres Verhältniss, als die B zu der C. Dies hat sie aber nicht, folglich ist auch die A nicht kleiner, als die B. Es ist aber gezeigt worden, dass sie ihr auch nicht gleich sey; folglich ist die A grösser, als die B.

B A C

Es habe ferner die C zu der B ein grösseres Verhältniss, als die C zu der A, so behaupte ich, dass die B kleiner, als die A, sey.

Denn wäre sie nicht kleiner, so wäre sie entweder ihr gleich, oder sie wäre grösser. Gleich kann die B der A nicht seyn, denn sonst hätte (5, 7. S.) die C zu den beyden A, B einerley Verhältniss. Dies hat sie aber nicht; folglich ist auch die A der B nicht gleich. Aber die B ist auch nicht gröſ-

grösser, als die A, denn sonst hätte (5, 8. S.) die C zu der B ein kleineres Verhältniss, als zu der A. Dies hat sie aber nicht; folglich ist auch die B nicht grösser, als die A. Es ist aber gezeigt worden, dass sie ihr auch nicht gleich sey; folglich ist die B kleiner, als die A.

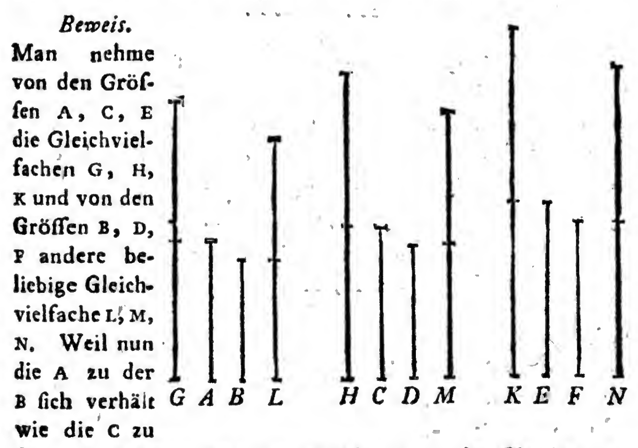
Demnach ist von Grössen u. s. w. w. z. e. w.

11. *Saz.*

Lehrsaz. Verhältnisse die *einem* dritten gleich sind, sind einander selbst gleich.

Es verhalte sich die A zu der B wie die C zu der D, und die C zu der D wie die E zu der F, so behaupte ich, dass die A zu der B sich verhalte, wie die E zu der F.

Beweis. Man nehme von den Grössen A, C, E die Gleichvielfachen G, H, K und von den Grössen B, D, F andere beliebige Gleichvielfache L, M, N. Weil nun die A zu der B sich verhält wie die C zu



der D, und man von den Grössen A, C die Gleichvielfachen G, H, und von den Grössen B, D andere beliebige Gleichvielfache L, M genommen hat, so ist (5, 5. Erkl.) je nachdem die G grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als die L, auch die H grösser, ebensogross, oder kleiner, als die M. Ferner da die C zu der D sich verhält wie die E zu der F, und man von den Grössen C, E die Gleichvielfachen H, K, von den Grössen, D, F aber andere

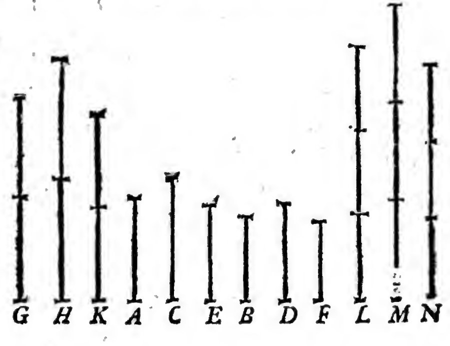
beliebige Gleichvielfache M, N genommen hat, so ist je nachdem die H gröſſer, ebensogroſs, oder kleiner ist, als die M, auch die K gröſſer, ebensogroſs, oder kleiner, als die N. Aber jenachdem die H gröſſer, ebensogroſs, oder kleiner ist, als die M, so ist auch die G gröſſer, ebensogroſs, oder kleiner, als die L; folglich ist, je nachdem die G gröſſer, ebensogroſs, oder kleiner ist, als die L, auch die K gröſſer, ebensogroſs, oder kleiner, als die N. Auch sind die G, K von den beyden A, E Gleichvielfache, die L, N aber von den beyden B, F andere beliebige Gleichvielfache; folglich verhält sich (5, 5. Erkl.) die A zu der B wie die E zu der F.

Verhältnisse also, die u. s. w. w. z. e. w.

12. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn Gröſſen, so viel ihrer seyn mögen, proportionirt sind, so verhält sich eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder wie alle Vorderglieder zusammen zu allen Hintergliedern zusammen.

Es seyen Gröſſen, soviel ihrer seyn mögen A, B, C, D, E, F proportionirt, so daſs die A zu der B sich verhalte wie die C zu der D, und wie die E zu der F, so behaupte ich, daſs die A zu der B sich verhalte wie die A, C, E zusammen zu den B, D, F zusammen.



Beweis. Man nehme von den Gröſsen A, C, E die Gleichvielfachen

fachen G, H, K und von den Gröſſen B, D, F andere beliebige Gleichvielfache L, M, N. Da nun die A zu der B ſich verhält wie die C zu der D, und die E zu der F, und da man von den Gröſſen A, C, E die Gleichvielfachen G, H, K, und von den Gröſſen B, D, F andere beliebige Gleichvielfache L, M, N genommen hat, ſo iſt (5, 5. Erkl.) je nachdem die G gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner iſt, als die L, auch die H gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner, als die M, und die K gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner, als die N. Je nachdem alſo die G gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner iſt, als die L, ſo werden auch die G, H, K zuſammen gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner ſeyn, als die L, M, N zuſammen. Auch ſind die G und die G, H, K zuſammen von der A, und den A, C, D zuſammen Gleichvielfache, weil (5, 1. S.) wenn Gröſſen, ſoviel ihrer ſeyn mögen, von ebenſovielen andern ſtückweiſe gleichvielfach ſind, auch alle erſte zuſammen von allen lezten zuſammen ebenſovielfach ſind, als eine der erſten von einer der lezten. Aus eben dem Grunde alſo ſind auch die L, und die L, M, N zuſammen von der B und den B, D, F zuſammen gleichvielfach; folglich verhält ſich (5, 5. Erkl,) die A zu der B wie die A, C, E zuſammen zu den B, D, F zuſammen.

Wenn demnach Gröſſen, ſoviel ihrer ſeyn mögen u. ſ. w. w. z. e. w.

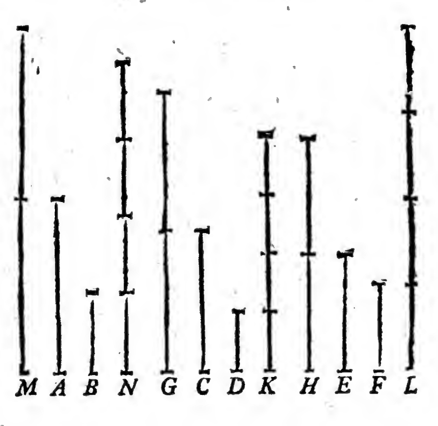
13. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn die erſte Gröſſe zu der zweyten ſich verhält, wie die dritte zur vierten, die dritte zur vierten aber ein gröſſeres Verhältniſs hat, als die fünfte zur ſechſten, ſo hat auch die erſte zur zweyten ein gröſſeres Verhältniſs, als die fünfte zur ſechſten.

Die erſte Gröſſe A verhalte ſich zur zweyten B wie die dritte C zur vierten D, die dritte C aber habe zur vierten D ein gröſſeres Verhältniſs, als die fünfte E zur ſechſten F, ſo behaupte ich, daſs auch die erſte A zur

zweyten B ein grösseres Verhältniss habe, als die fünfte E zur sechsten F.

Beweis. Da die C zu der D ein grösseres Verhältniss hat, als die E zu der F, so sind (5, 7. Erklär.) gewisse Gleichvielfache der Grössen C, E und gewisse andere Gleichvielfache der Grössen D, F so beschaffen, dass zwar das Vielfache von C grösser ist, als das Vielfache von D, aber das Vielfache von E nicht grösser ist, als das Vielfache von F. Man nehme diese Vielfachen, und es seyen von den beyden C, E die G, H gleichvielfach, von den beyden D. F aber die K, L andere beliebige Gleichvielfache, so dass zwar die G grösser sey, als die K, die H aber nicht grösser sey, als die L, auch sey die M von der A ebensovielfach, als die G von der C, und die N von der A ebensovielfach, als die K von der D.



Da nun A zu B sich verhält wie C zu D, und man von den beyden A, C die Gleichvielfachen M, G, und von den beyden B, D andere beliebige Gleichvielfache N, K genommen hat, so ist (5, 5. Erkl.) je nachdem die M grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als die N, auch die G grösser, ebensogross, oder kleiner, als die K. Aber die G ist grösser, als die K; folglich ist auch die M grösser, als die N. Die H aber ist nicht grösser, als die L. Auch sind die M, H von den beyden A, E gleichvielfach, die N, L aber von den beyden B, F andere beliebige Gleichvielfache; folglich hat (5, 7. Erkl.) die A zu der B ein grösseres Verhältniss, als die E zu der F.

Wenn

Wenn demnach die erste Grösse zur zweyten sich verhält, u. s. w. w. z. e. w.

14. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn die erste Grösse zur zweyten sich verhält wie die dritte zur vierten, so ist, je nachdem die erste grösser, ebensogross, oder kleiner, als die dritte, ist, auch die zweyte grösser, ebensogross, oder kleiner, als die vierte.

Die erste Grösse A verhalte sich zur zweyten B wie die dritte C zur vierten D, es sey aber die A grösser, als die C, so behaupte ich, dass auch die B grösser, als die D, sey.

A B C D

Beweis. Da die A grösser ist, als die C, und die B eine andere beliebige Grösse, so hat (5, 8. S.) die A zu der B ein grösseres Verhältniss, als die C zu der B. Aber wie die A zu der B sich verhält, so verhält sich auch die C zu der D, folglich hat (5, 13. S.) auch die C zu der D ein grösseres Verhältniss, als die C zu der B. Von zwey Grössen aber ist (5, 10. S.) diejenige die kleinere, zu welcher einerley Grösse ein grösseres Verhältniss hat; folglich ist die D kleiner, als die B, und mithin die B grösser, als die D. Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, dass, je nachdem die A ebensogross, oder kleiner ist, als die C, auch die B ebensogross, oder kleiner sey, als die D.

Wenn demnach die erste Grösse zur zweyten u. s. w. w. z. e. w.

15. *Saz.*

15. *Saz.*

Lehrſaz. Die Theile haben das nämliche Verhältniſs zu einander wie ihre Gleichvielfachen.

Es ſey die AB von der C ebenſovielfach, als die DE von der F, ſo behaupte ich, daſs die C zu der F ſich verhalte wie die AB zu der DE.

A D G K H L C E B F

Beweis. Da die AB von der C ebenſovielfach iſt, als die DE von der F, ſo ſind in der DE ebenſoviele Gröſſen, jede gleich der F, als in der AB Gröſſen, jede gleich der C, ſind. Man theile die AB in die Gröſſen AG, GH, HB, jede gleich der C, und die DE in die Gröſſen DK, KL, LE, jede gleich der F, ſo iſt die Menge der Gröſſen AG, GH, HB der Menge der Gröſſen DK, KL, LE, gleich. Und da ſowohl die AG, GH, HB als auch die DK, KL, LE einander ſtückweiſe gleich ſind, ſo verhält ſich (5, 7. S.) die AG zu der DK wie die GH zu der KL und die HB zu der LE. Es verhält ſich aber auch (5, 12. S.) eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder wie alle Vorderglieder zuſammen zu allen Hintergliedern zuſammen; folglich verhält ſich die AG zu der DK wie die AB zu der DE. Aber die AG iſt der C, und die DK der F gleich; folglich verhält ſich die C zu der F wie die AB zu der DE.

Demnach haben die Theile u. ſ. w. w. z. e. w.

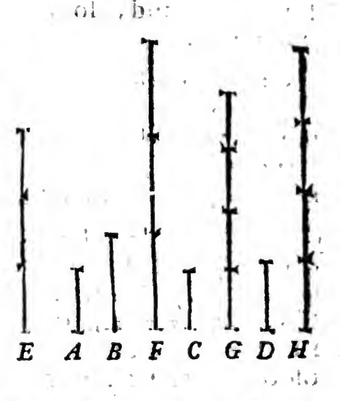
16. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn vier Gröſſen proportionirt ſind, ſo ſind ſie auch *verwechſelt* proportionirt.

Es ſeyen die vier Gröſſen A, B, C, D proportionirt, und es verhalte ſich die A zu der B wie die C zu der D, ſo

so behaupte ich, dass sie auch verwechselt proportionirt seyen, dass nämlich die A zu der C sich verhalte wie die B zu der D.

Beweis. Man nehme von den Grössen A, B die Gleichvielfachen E, F, von den Grössen C, D aber andere beliebige Gleichvielfache G, H. Da nun die E von der A ebensovielfach ist, als die F von der B, aber (5, 15. S.) die Theile das nämliche Verhältniss zu einander haben, wie ihre Gleichvielfachen, so verhält sich die A zu der B,



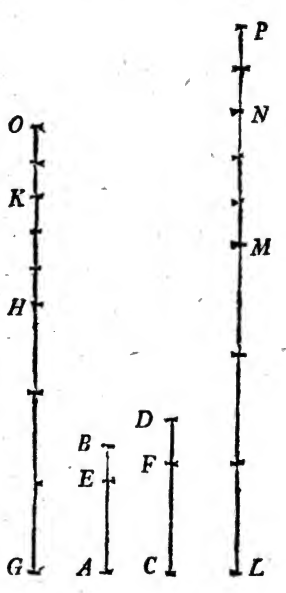
wie die E zu der F. Aber wie sich die A zu der B verhält, so verhält sich die C zu der D; folglich verhält sich auch (5, 11. S.) die C zu der D wie die E zu der F. Ferner da die G, H von den beyden C, D gleichvielfach sind, so verhält sich die C zu der D wie die G zu der H. Aber wie sich die C zu der D verhält, so verhält sich die E zu der F; folglich verhält sich auch (5, 11. S.) die E zu der F wie die G zu der H. Wenn aber vier Grössen proportionirt sind, so ist (5, 14. S.) je nachdem die erste grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als die dritte, auch die zweyte grösser, ebensogross, oder kleiner, als die vierte. Je nachdem also die E grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als die G, so ist auch die F grösser, ebensogross, oder kleiner, als die H. Auch sind die E, F von den beyden A, B gleichvielfach, die G, H aber von den beyden C, D andere beliebige Gleichvielfache; folglich verhält sich (5, 5. Erkl.) die A zu der C wie die B zu der D.

Wenn demnach vier Grössen proportionirt sind u. s. w. w. z. e. w.

17. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn Grössen *verbunden* proportionirt sind, so sind sie auch *getrennt* proportionirt.

Es seyen die *verbundenen* Grössen AB, BE, CD, DF proportionirt, und es verhalte sich AB zu BE wie CD zu DF, so behaupte ich, dass sie auch *getrennt* proportionirt seyen, dass nämlich die AE zu der EB sich verhalte wie die CF zu der FD.



Beweis. Man nehme von den Grössen AE, EB, CF, FD die Gleichvielfachen GH, HK, LM, MN, von den Grössen EB, FD aber andere beliebige Gleichvielfache KO, NP. Da nun die GH von der AE ebensovielfach ist, als die HK von der EB, so ist (5, 1. S.) die GH von der AE ebensovielfach, als die GK von der AB. Es ist aber die GH von der AE ebensovielfach, als die LM von der CF; folglich ist auch die GK von der AB ebensovielfach, als die LM von der CF. Ferner da die LM von der CF ebensovielfach ist, als die MN von der FD, so ist auch die LM von der CF ebensovielfach, als die LN von der CD. Es war aber die LM von der CF ebensovielfach, als die GK von der AB; folglich ist auch die GK von der AB ebensovielfach, als die LN von der CD, und mithin sind die GK, LN von den AB, CD gleichvielfach. Ferner da die HK von der EB ebensovielfach ist, als die MN von der FD, aber auch die KO von der EB ebensovielfach ist, als die NP von der FD, so ist (5, 2. S.) auch

auch *verbunden* die HO von der EB ebensovielfach, als die MP von der FD. Da aber die AB zu der BE sich verhält wie die CD zu der DF, und man von den beyden AB, CD die Gleichvielfachen GK, LN, von den beyden EB, FD aber andere beliebige Gleichvielfache HO, MP genommen hat, so ist (5, 5. Erkl.) je nachdem die GK grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als die HO, auch die LN grösser, ebensogross, oder kleiner, als die MP. Es sey nun die GK grösser, als die HO, und man nehme von beyden die gemeinschaftliche HK weg, so ist die GH grösser; als die KO. Wenn aber die GK grösser ist, als die HO, so ist auch die LN grösser, als die MP; folglich ist die LN grösser, als die MP, und wenn man von beyden die gemeinschaftliche MN wegnimmt, so ist auch die LM grösser, als die NP. Wenn also die GH grösser ist, als die KO, so ist auch die LM grösser, als die NP. Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, dass, je nachdem die GH ebensogross, oder kleiner ist, als die KO, auch die LM ebensogross, oder kleiner sey, als die NP. Es sind aber die GH, LM von den beyden AE, CF gleichvielfach, die KO, NP aber von den beyden EB, FD andere beliebige Gleichvielfache; folglich verhält sich (5, 5. Erkl.) die AE zu der EB wie die CF zu der FD.

Wenn demnach Grössen *verbunden* proportionirt sind u. s. w. w. z. e. w.

18. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn Grössen *getrennt* proportionirt sind, so sind sie auch *verbunden* proportionirt.

Es seyen die *getrennten* Grössen AE, EB, CF, FD proportionirt, und es verhalte sich die AE zu der EB wie die CF zu der FD, so behaupte ich, dass sie auch *verbunden* proportionirt seyen, dass nämlich die AB zu der BE sich verhalte wie die CD zu der FD.

Be-

Beweis. Verhielte ſich nicht die AB zu der BE wie die CD zu der FD, ſo verhielte ſich die AB zu der BE wie die CD zu einer kleinern oder gröſſern Gröſſe, als die FD iſt. Es ſey erſtlich das vierte Glied dieſer Proportion eine kleinere Gröſſe, als die FD, nämlich die DG. Da nun die AB zu der BE ſich verhält wie die CD zu der DG, ſo ſind dieſe Gröſſen *verbunden* proportionirt; folglich ſind ſie (5, 17. S.) auch *getrennt* proportionirt, und es verhält ſich alſo die AE zu der EB wie die CG zu der GD. Nach der Vorausſezung aber verhält ſich auch die AE zu der EB wie die CF zu der FD; folglich verhält ſich auch (5, 11. S.) die CG zu der GD wie die CF zu der FD. Aber die erſte CG iſt gröſſer, als die dritte CF; folglich iſt (5, 14. S.) auch die zweyte GD gröſſer, als die vierte FD. Sie iſt aber auch kleiner, welches unmöglich iſt; folglich verhält ſich nicht die AB zu der BE wie die CD zu einer Gröſſe, die kleiner wäre, als die FD. Eben ſo kann aber gezeigt werden, daſs das vierte Glied dieſer Proportion auch nicht gröſſer ſeyn könne, als die FD; folglich muſs es die FD ſelbſt ſeyn.

Wenn demnach Gröſſen *verbunden* proportionirt ſind u. ſ. w. w. z. e. w.

19. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn eine Gröſſe ſich zu einer andern verhält, wie ein Stück der erſten zu einem Stücke der andern, ſo verhält ſich auch der Reſt der erſten zum Reſte der andern wie die erſte zur andern.

Es verhalte ſich die Gröſſe AB zu der Gröſſe CD wie das Stück der erſten AE zu dem Stücke der andern CF, ſo behaupte ich, daſs auch der Reſt der erſten EB zum Reſte

Reste der andern FD sich verhalte wie die erste AB zu der andern CD.

Beweis. Da die AB zu der CD sich verhält wie die AE zu der CF, so verhält sich (5, 17. S.) auch *verwechselt* die BA zu der AE wie die DC zu der CF. Und da diese Grössen *verbunden* proportionirt sind, so sind sie (5, 17. S.) auch *getrennt* proportionirt, und es verhält sich also die BE zu der EA wie die DF zu der FC, und wiederum *verwechselt* die BE zu der DF wie die EA zu der FC. Aber wie die AE zu der CF sich verhält, so verhält sich, nach der Voraussezung, die AB zu der CD. Folglich verhält sich auch (5, 11. S.) der Rest EB zu dem Reste FD wie die ganze AB zu der ganzen CD.

B D E F C A

Wenn demnach eine Grösse zu einer andern sich verhält u. s. w. w. z. e. w.

Zusaz. Da gezeigt worden ist, dass, wenn die AB zu der CD sich verhält, wie die AE zu der CF, auch die AB zu der CD sich verhalte, wie die EB zu der FD, so verhält sich auch (5, 16. S.) *verwechselt* die AB zu der EB wie die CD zu der FD, und (5, 17. S.) *getrennt* die AE zu der BE wie die CF zu der FD, und (5, 4. Zus.) *umgekehrt* die BE zu der AE wie die FD zu der CF, und (5, 18. S.) *verbunden* die AB zu der AE wie die CD zu der CF. Dies ist aber (5, 17. Erkl.) *zurückkehrend.* Wenn demnach *verbundene* Grössen proportionirt sind, so sind sie auch *zurückkehrend* proportionirt.

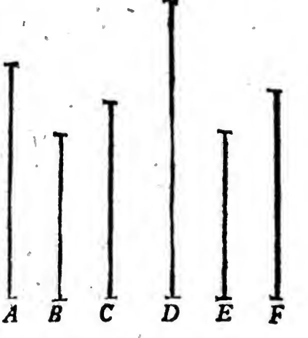
20. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn drey Grössen mit eben so vielen andern, je zwey mit je zweyen, einerley Verhältniss haben, so ist, je nachdem die

die erſte gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner iſt, als die dritte, auch die vierte gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner, als die ſechſte.

Es haben die drey Gröſſen A, B, C zu eben ſo vielen andern D, E, F, je zwey, zu je zweyen, einerley Verhältniſs, ſo daſs nämlich die A zu der B ſich verhalte wie die D zu der E, und die B zu der C wie die E zu der F, es ſey aber die A gröſſer, als die C, ſo behaupte ich, daſs auch die D gröſſer ſey, als die F. Wäre aber die A ebenſogroſs, oder kleiner, als die C, ſo behaupte ich, daſs alsdann auch die D ebenſogroſs, oder kleiner ſey, als die F.

Beweis. Da die A gröſſer iſt, als die C, die B aber eine andere beliebige Gröſſe, und da (5, 8. S.) von zwey ungleichen Gröſſen die gröſſere zu einerley Gröſſe ein gröſſeres Verhältniſs hat, als die kleinere, ſo hat die A zu der B ein gröſſeres Verhältniſs, als die C zu der B, Aber wie die A zu der B ſich verhält, ſo verhält ſich auch die D zu der E, und *umgekehrt* die C zu der B wie die F zu der E; folglich hat auch die D zu der E ein gröſſeres Verhältniſs, als die F zu der E. Von Gröſſen aber, die zu einerley Gröſſe ein Verhältniſs haben, iſt (5, 10. Erkl.) diejenige die gröſſere, welche das gröſſere Verhältniſs hat, folglich iſt die D gröſſer, als die F. Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, daſs, je nachdem die A ebenſogroſs, oder kleiner iſt, als die C, auch die D ebenſogroſs, oder kleiner ſey, als die F.



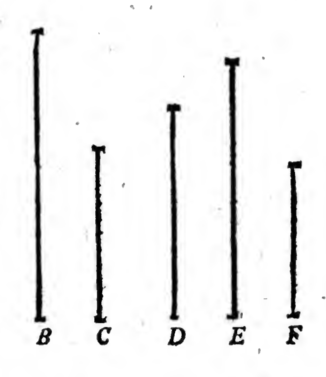
Wenn demnach drey Gröſſen zu eben ſo vielen andern u. ſ. w. w. z. e. w.

21. *Saz.*

21. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn drey Gröſsen zu ebenſo vielen andern, je zwey zu je zweyen, einerley Verhältniſs haben, aber ſo, daſs ſie in *zerſtreuter* Proportion ſtehen, ſo iſt, je nachdem die erſte gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner iſt, als die dritte, auch die vierte gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner, als die ſechſte.

Es haben die drey Gröſſen A, B, C zu eben ſo vielen andern D, E, F, je zwey zu je zweyen, einerley Verhältniſs, aber ſo, daſs ſie in zerſtreuter Proportion ſtehen, daſs nämlich die A zu der B ſich verhalte wie die E zu der F, und die B zu der C wie die D zu der E, es ſey aber die A gröſſer, als die C, ſo behaupte ich, daſs auch die D gröſſer, als die F, ſey. Wäre aber die A ebenſogroſs, oder kleiner, als die C, ſo behaupte ich, daſs auch die D ebenſogroſs, oder kleiner, als die F, ſey.



Beweis. Da die A gröſſer, als die C, die B aber eine andere Gröſſe iſt, ſo hat (5, 8. S.) die A zu der B ein gröſſeres Verhältniſs, als die C zu der B. Aber wie die A zu der B ſich verhält, ſo verhält ſich die E zu der F, und *umgekehrt* die C zu der B wie die E zu der D; folglich hat auch die E zu der F ein gröſſeres Verhältniſs, als die E zu der D. Von zwey Gröſſen aber iſt (5, 10. Erkl.) diejenige die kleinere, zu welcher einerley Gröſſe ein gröſſeres Verhältniſs hat; folglich iſt die F kleiner, als die D, und mithin die D gröſſer, als die F. Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, daſs,

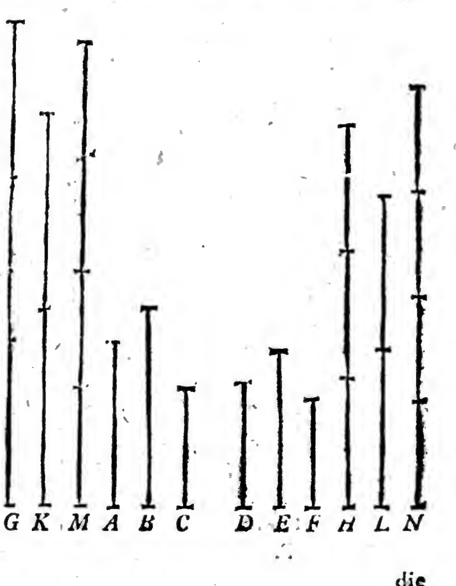
dafs, je nachdem die A ebenfogrofs, oder kleiner ift, als die C, auch die D ebenfogrofs, oder kleiner fey, als die F.

Wenn demnach drey Gröffen zu eben fo vielen andern u. f. w. w. z. e. w.

22. *Saz.*

Lehrfaz. Wenn Gröffen, fo viel ihrer feyn mögen, mit eben fo vielen andern, je zwey mit je zweyen proportionirt find, fo find fie auch *gleichförmig* proportionirt.

Es feyen Gröffen, fo viel ihrer feyn mögen, A, B, C, mit eben fo vielen andern D, E, F, je zwey mit je zweyen, proportionirt, fo dafs die A zu der B fich verhalte wie die D zu der E, und die B zu der C wie die E zu der F, fo behaupte ich, dafs fie auch gleichförmig proportionirt feyen, dafs nämlich die A zu der C fich verhalte wie die D zu der F.



Beweis. Man nehme von den beyden A, D die Gleichvielfachen G, H von den beyden B, E andere beliebige Gleichvielfache K, L, und von den beyden C, F wiederum andere beliebige Gleichvielfache M, N. Da nun die A zu der B fich verhält wie

die

die D zu der E, und man von den beyden A, D die Gleichvielfacheu G, H, und von den beyden B, E andere beliebige Gleichvielfache K, L genommen hat, so verhält sich (5, 4. S.) die G zu der K wie die H zu der L, und aus eben dem Grunde auch die K zu der M wie die L zu der N. Da nun hier die drey Grössen G, K, M mit eben so vielen andern H, L, N, je zwey mit je zweyen, proportionirt sind, so ist (5, 20. S.) *gleichförmig* je nachdem die G grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als die M auch die H grösser, ebensogross, oder kleiner, als die N. Auch sind die G, H von den beyden A, D Gleichvielfache, die M, N, aber von den beyden C, F andere beliebige Gleichvielfache. Folglich verhält sich (5, 5. Erkl.) die A zu der C wie die D zu der F.

Wenn demnach Grössen so viel ihrer seyn mögen, u. s. w. w. z. e. w.

23. *Saz.*

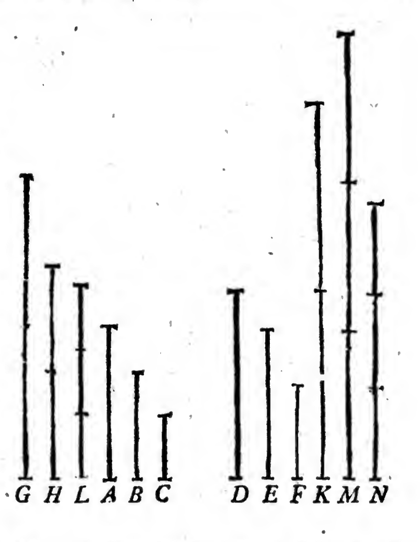
Lehrsaz. Wenn drey Grössen mit ebensovielen andern, je zwey mit je zweyen, proportionirt sind, aber so, dass sie in *zerstreuter* Proportion stehen, so sind sie auch *gleichförmig* proportionirt.

Es seyen drey Grössen A, B, C, mit ebensovielen andern D, E, F, je zwey mit je zweyen, proportionirt, aber so, dass sie in *zerstreuter* Proportion stehen, dass nämlich die A zu der B sich verhalte, wie die E zu der F, und die B zu der C wie die D zu der E, so behaupte ich, dass auch die A zu der C sich verhalte wie die D zu der F.

Beweis. Man nehme von den Grössen A, B, D, die Gleichvielfachen G, H, K, von den Grössen C, E, F aber andere beliebige Gleichvielfache L, M, N. Da nun die G, H von den beyden A, B Gleichvielfache sind, die Theile aber (5, 15. S.) sich eben so verhalten wie ihre Gleichvielfachen, so verhält sich die A zu der B wie die

G

G zu der H, und aus gleichem Grunde die E zu der F wie die M zu der N. Auch verhält sich die A zu der B wie die E zu der F; folglich verhält sich auch (5, 11. S.) die G zu der H wie die M zu der N. Da nun auch die B zu der C sich verhält wie die D zu der E, und man von den beyden B, D die Gleichvielfachen H, K, von den beyden C, E aber andere beliebige Gleichvielfache die L, M genommen hat, so verhält sich (5, 15. S.) die H zu der L wie die K zu der M. Es ist aber gezeigt worden, dass die G zu der H sich verhalte, wie die M zu der N. Da nun drey Grössen G, H, L mit ebensovielen andern K, M, N, je zwey mit je zweyen, proportionirt sind, und ihre Proportion *zerstreut* ist, so ist (5, 21. S.) *gleichförmig* je nachdem die G grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als die L, auch die K grösser, ebensogross, oder kleiner, als die N. Es sind aber die G, K von den beyden A, D, die L, N aber von den beyden C, F Gleichvielfache; folglich verhält sich (5, 5. Erkl.) di A zu der C wie die D zu der F.



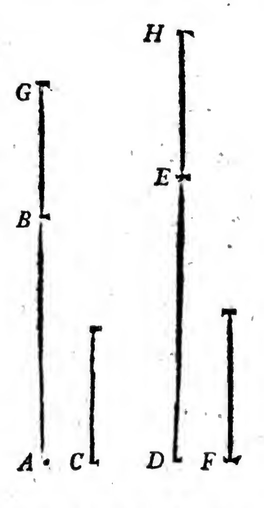
Wenn demnach drey Grössen mit ebensovielen andern u. s. w. w. z. e. w.

24. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn die erste Grösse zur zweyten sich verhält, wie die dritte zur vierten, aber auch die fünfte zur zweyten wie die sechste

ſechſte zur vierten, ſo verhält ſich auch *verbunden* die erſte und fünfte zur zweyten, wie die dritte und ſechſte zur vierten.

Es verhalte ſich die erſte Gröſſe AB zur zweyten C wie die dritte DE zur vierten F, aber auch die fünfte BG zur zweyten C wie die ſechſte EH zur vierten F, ſo behaupte ich, daſs auch *verbunden* die erſte und fünfte AG zur zweyten C ſich verhalte wie die dritte und ſechste DH zur vierten F.



Beweis. Da die BG zu der C ſich verhält wie die EH zu der F, ſo verhält ſich auch *umgekehrt* (5, 4. Zuſ.) die C zu der BG wie die F zu der EH. Und da die AB zu der C ſich verhält wie die DE zu der F, und die C zu der BG wie die F zu der EH, ſo verhält ſich (5, 22. S.) auch gleichförmig die AB zu der BG wie die DE zu der EH. Da aber hier *getrennte* Gröſſen proportionirt ſind, ſo ſind ſie (5, 18. S.) auch *verbunden* proportionirt; es verhält ſich alſo die AG zu der GB wie die DH zu der HE Es verhält ſich aber auch die GB zn der C wie die EH zu der F; folglich verhält ſich (5, 22. S.) auch *gleichförmig* die AG zu der C wie die DH zu der F.

Wenn demnach die erſte Gröſſe zur zweyten ſich verhält u. ſ. w. w. z. e. w.

25. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn vier Gröſſen proportionirt ſind, ſo iſt die gröſste und die kleinſte von ihnen gröſſer, als die beyden übrigen.

Es seyen die vier Grössen AB, CD, E, F proportionirt, so dass die AB zu der CD sich verhalte wie die E zu der F, und es sey die AB die grösste von ihnen, die F aber die kleinste, so behaupte ich, dass die AB, F grösser seyen, als die CD, E.

Beweis. Man mache der E die AG, der F aber die CH gleich. Da nun die AB zu der CD sich verhält wie die E zu der F, die AG aber der E, und die CH der F gleich ist, so verhält sich auch die AB zu der CD wie die AG zu der CH. Da aber die ganze AB zu der ganzen CD sich verhält wie das Stück AG zu zu dem Stücke CH so verhält sich (5, 19. S.) auch der Rest GB zu dem Reste HD wie die ganze AB zu der ganzen CD. Nach der Voraussezung aber ist die AB grösser, als die CD, folglich ist auch die GB grösser, als die HD. Da aber die AG der E, und die CH der F gleich ist, so sind die beyden AG, F den beyden CH, E gleich. Wenn man aber zu ungleichen Grössen gleiches hinzusezt, so sind die Ganzen ungleich. Da nun die GB, HD ungleich sind, und die GB die grössere ist, so sind, wenn man zu der GB die AG, F, zu der HD aber die CH, E hinzusezt, die beyden AB, F grösser, als die beyden CD, E.

Wenn demnach vier Grössen proportionirt sind, u. s. w. w. z. e. w.

B G A D H C E F

Euklids

EUKLIDS ELEMENTE.

SECHSTES BUCH.

Erklärungen.

1. *Aehnliche geradlinige Figuren* sind, in welchen alle Winkel einander stückweise gleich, und die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt sind.

2. *Umgekehrt* sind Figuren (in Ansehung des Verhältnisses ihrer Seiten), wenn in beyden Vorderglieder und Hinterglieder der Verhältnisse sind.

3. Eine gerade Linie heisst *nach äusserem und mittlerem Verhältnisse* getheilt, wenn die ganze sich zum grössern Abschnitte, wie der grössere Abschnitt zum kleinern, verhält.

4. Die *Höhe* einer Figur ist ein Loth, das von der Spize derselben nach der Grundlinie gefällt wird.

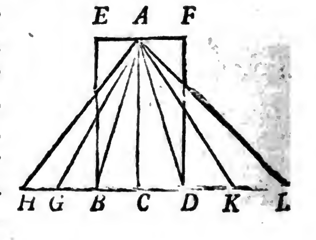
5. Ein Verhältniss heisst aus andern *zusammengesezt*, wenn die Grössen der Verhält-

nisse durch einander vervielfältiget ein Verhältniss ausmachen.

1. *Saz.*

Lehrsaz. Dreyecke nnd Parallelogramme, welche einerley Höhe haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Es seyen die Dreyecke ABC, ACD, und die Parallelogramme EC, CF, welche einerley Höhe haben, nämlich das Loth, das von dem Punkte A nach BD gefällt wird, so behaupte ich, dass die Grundlinie BC zu der CD sich verhalte wie das Dreyeck ABC zu dem Dreyecke ABD und das Parallelogramm EC zu dem Parallelogramme CF.



Beweis. Man verlängere die BD auf beyden Seiten nach den Punkten H, L, und mache der Grundlinie BC, die BG, GH, so viel man will, gleich, der Grundlinie DC aber mache man wiederum Linien, so viel man will, wie die DK, KL gleich, und ziehe die AG, AH, AK, AL.

Da nun die CB, BG, GH, einander gleich sind, so sind (1, 38. S.) die Dreyecke AGH, AGB, ABC, einander gleich; wievielfach also die Grundlinie HC von der Grundlinie BC ist, ebensovielfach ist das Dreyrck AHC von dem Dreyecke ABC. Aus gleichem Grunde ist das Dreyeck ALC von dem Dreyecke ACD ebensovielfach, als die Grundlinie LC von der Grundlinie CD, und (1, 38. S.) ist, je nachdem die Grundlinie HC ebensogross, oder grösser, oder kleiner ist, als die Grundlinie CL, auch das Dreyeck AHC ebensogross, oder grösser, oder kleiner, als das Dreyeck ALC. Es sind also hier von den vier Grössen nämlich den zwey Grundlinien BC, BD, und den zwey Drey-

Dreyecken ABC, ACD Gleichvielfache genommen worden, nämlich von der Grundlinie BC und dem Dreyecke ABC die Grundlininie HC und das Dreyeck AHC, von der Grundliuie CD und dem Dreyecke ACD aber andere beliebige Gleichvielfache, nämlich die Grundlinie CL und das Dreyeck ACL, und es iſt gezeigt worden, daſs je nachdem die Grundlinie HC gröſſer, ebenoſogroſs, oder kleiner iſt, als die Grundlinie CL, auch das Dreyeck AHC gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner ſey, als das Dreyeck ALC; folglich verhält ſich (5, 5. Erkl.) die Grundlinie BC zu der Grundlinie CD wie das Dreyeck ABC zu dem Dreyecke ABD.

Und da (1, 41. S.) das Parallelogramm EC das Doppelte von dem Dreyecke ABC, und das Parallelogramm FC das Doppelte von dem Dreyecke ACD iſt, aber (5, 14. S.) die Theile ſich zu einander verhalten wie ihre Gleichvielfachen, ſo verhält ſich das Parallelogramm EC zu dem Parallelogramme FC wie das Dreyeck ABC zu dem Dreyecke ACD. Da nun gezeigt worden iſt, daſs das Dreyeck ABC zum Deeyecke ACD ſich verhalte wie die Grundlinie BC zur Grundlinie CD, und daſs das Parallelogramm EC zum Parallelogramme FC ſich verhalte wie das Dreyeck ABC zum Dreyecke ACD, ſo verhält ſich (5, 11. S.) auch das Parallelogramm EC zum Parallelogramme FC wie die Grundlinie BC zur Grundlinie CD.

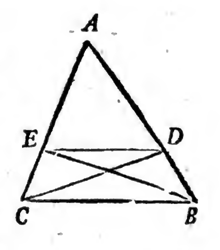
Demnach verhalten ſich Dreyecke und Parallelogramme u. ſ. w. w. z. e. w.

2. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn mit einer der Seiten eines Dreyecks eine gerade Linie parallel gezogen wird, ſo ſchneidet ſie die übrigen Seiten des Dreyecks proportionirt; und wenn die Seiten eines Dreyecks proportionirt geſchnitten werden, ſo iſt die gerade Linie, welche die Durchſchnitte verbindet, der übrigen Seite des Dreyecks parallel.

Man

Man ziehe mit einer Seite BC des Dreyecks ABC die DE parallel, so behaupte ich, dass die CE zu der EA sich verhalte, wie die BD zu der DA.



Beweis. Man ziehe die BE und CD. Nun ist (1, 37. S.) das Dreyeck BDE dem Dreyecke CDE gleich, denn sie sind auf einerley Grundlinie DE und in einerley Parallelen DE, BC. Es ist aber ADE ein anderes Dreyeck, und (5, 7. S) haben gleiche Grössen zu *einer* Grösse einerley Verhältniss, folglich verhält sich das Dreyeck CDE zum Dreyecke ADE wie das Dreyeck BDE znm Dreyecke ADE. Aber wie das Dreyeck BDE sich zum Dreyecke ADE verhält, so verhält sich die BD zu der DA, denn da sie einerley Höhe haben, nämlich das Loth von dem Punkte E nach der AB, so verhalten sie sich (6, 1. S.) wie ihre Grundlinien. Aus eben dem Grunde verhält sich auch die CE zu der EA wie das Dreyeck CDE zu dem Dreyecke ADE; folglich verhält sich (5, 11. S.) die BD zu der DA wie die CE zu der EA.

Es seyen nun die Seiten AB, AC des Dreyecks ABC in den Punkten D, E proportionirt geschnitten, so dass die BD zu der DA sich verhalte wie die CE zu der EA, und man ziehe die DE, so behaupte ich, dass die DE der BC parallel sey.

Da, nach der vorigen Construction, die CE zu der EA sich verhält, wie die BD zu der DA, aber (6, 1. S.) das Dreyeck BDE zum Dreyecke ADE wie die BD zu der DA, und das Dreyeck CDE zum Dreyecke ADE wie die CE zu der EA, so verhält sich (5, 11. S.) das Dreyeck CDE zum Dreyecke ADE wie das Dreyeck BDE zum Dreyecke ADE. Beyde Dreyecke BDE, CDE haben also zum Dreyecke ADE einerley Verhältniss; folglich ist (5, 9. S.) das Dreyeck BDE dem Dreyecke CDE gleich; auch sind sie auf einerley Grundlinie DE. Gleiche Drey-

Dreyecke aber auf einerley Grundlinie sind (1, 39. S.) auch in einerley Parallelen; folglich ist die DE der BC parallel.

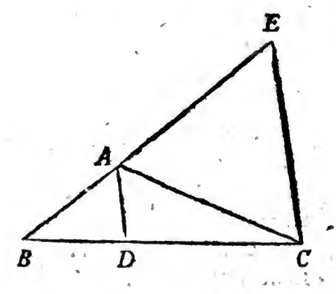
Wenn demnach mit einer der Seiten des Dreyecks u. s. w. w. z. e. w.

3. *Saz.*

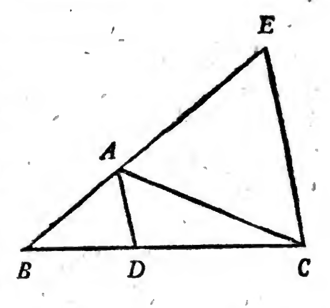
Lehrsaz. Wenn ein Winkel eines Dreyecks halbirt wird, und die den Winkel halbirende Linie auch die Grundlinie schneidet, so sind die Abschnitte der Grundlinie den übrigen Seiten des Dreyecks proportionirt; und wenn die Abschnitte der Grundlinie den übrigen Seiten des Dreyecks proportionirt sind, so halbirt die gerade Linie, welche von der Spize nach dem Durchschnitte gezogen wird, den gegenüberliegenden Winkel des Dreyecks.

Es sey das Dreyeck ABC, und dessen Winkel BAC werde von der geraden Linie AD halbirt, so behaupte ich, dafs die BD zu der DC sich verhalte, wie die BA zu der AC.

Beweis. Man ziehe (1, 31. S.) durch den Punkt C mit der DA die CE parallel, verlängere hierauf die BA, bis sie mit der CE in dem Punkte E zusammentrifft.



Da nun die Parallelen AD, EC von der Linie AC geschnitten werden, so ist (1, 29. S.) der Winkel ACE dem Winkel CAD gleich. Aber nach der Voraussezunng ist der Winkel CAD dem Winkel BAD gleich; folglich ist auch der Winkel BAD dem Winkel ACE gleich. Ferner da die Parallelen AD, EC von der Linie BAE geschnitten werden, so ist (1,



(1, 29. S.) der äussere Winkel BAD dem innern AEC gleich. Es ist aber gezeigt worden, dass der Winkel ACE dem Winkel BAD gleich sey; folglich ist auch der Winkel ACE dem Winkel AEC, und daher (1, 6. S.) die Seite AE der Seite AC gleich. Und da mit der Seite EC des Dreyecks BCE die AD parallel gezogen worden, so verhält sich (6, 2. S. die BA zu der AE wie die BD zu der DC. Es ist aber der AE die AC gleich; folglich verhält sich (5, 7. S.) die BA zu der AC wie die BD zu der DC.

Es verhalte sich aber nun die BA zu der AC wie die BD zu der DC, und man ziehe die AD, so behaupte ich, dass der Winkel BAC von der Linie AD halbirt werde.

Denn da, nach der vorigen Construction, die BA zu der AC sich verhält wie die BD zu der DC, aber (6, 2. S.) die BA zu der AE wie die BD zu der DC, denn es ist mit der Seite EC des Dreyecks BCE die AD parallel gezogen worden, so verhält sich die BA zu der AE wie die BA zu der AC; folglich ist (5, 9. S.) die AC der AE und daher (1, 5. S.) der Winkel AEC dem Winkel ACE gleich. Aber (1, 29. S.) ist der Winkel AEC dem äusseren Winkel BAD, der Winkel ACE aber dem Wechselwinkel CAD gleich; folglich ist auch der Winkel BAD dem CAD gleich, und mithin der Winkel BAC von der Linie AD halbirt.

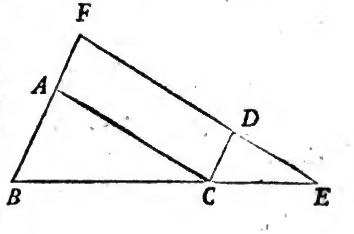
Wenn demnach ein Winkel eines Dreyecks halbirt wird u. s. w. w. z. e. w.

4. *Saz.*

4. *Saz.*

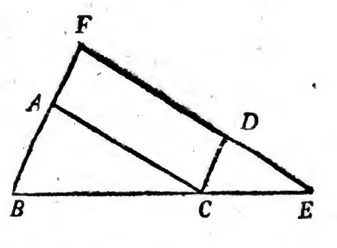
Lehrſaz. In gleichwinkeligen Dreyecken ſind die Seiten, welche um die gleichen Winkel liegen, proportionirt, und die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, homolog.

Es ſeyen die Dreyecke ABC, *D*CE gleichwinkelig ſo daſs der Winkel ABC dem *D*CE, der Winkel ACB dem *D*EC, und daher auch der Winkel BAC dem C*D*E gleich ſey, ſo behaupte ich, daſs in den gleichwinkeligen Dreyecken ABC, *D*CE die Seiten, welche um die gleichen Winkel liegen, proportionirt, und die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, homolog ſeyen.



Beweis. Man bringe die BC mit der CE in *eine* gerade Linie. Da nun (1, 17. S.) die Winkel ABC, ACB kleiner, als zwey rechte, ſind, der Winkel ACB aber dem Winkel *D*EC gleich iſt, ſo ſind auch die Winkel ABC, *D*EC kleiner, als zwey rechte, folglich treffen (11. Grundſ.) die BA, E*D* verlängert zuſammen. Man verlängere ſie, und ſie treffen in dem Punkte F zuſammen. Da nun der Winkel *D*CE dem Winkel ABC gleich iſt, ſo iſt (1, 28. S.) die BE der C*D* parallel. Ferner da der Winkel ACB dem Winkel *D*EC gleich iſt, ſo iſt die AC der FE parallel. Demnach iſt FAC*D* ein Parallelogramm, und daher (1, 34. S.) die FA der C*D*, die AC aber der F*D* gleich. Und da mit der Seite FE des Dreyecks FBE die AC parallel gezogen worden, ſo verhält ſich (6, 2. S.) die BC zu der CE, wie die BA zu der AF. Es iſt aber die AF der C*D* gleich; folglich verhält ſich auch (5, 7. S.) die BC zu der CE wie die BA zu der C*D*, und (5, 16. S.) *verwechſelt* die AB zu der BC wie die *D*C zu der

der CE. Ferner weil die CD der BF parallel ist, so verhält sich die BC zu der CE wie die FD zu der DE. Aber die DF ist der AC gleich; folglich verhält sich auch die BC zu der CE wie die AC zu der DE, und *verwechselt* die BC zu der CA wie die CE zu der ED. Da nun gezeigt worden ist, daſs die AB zu der BC sich verhalte, wie die DC zu der CE, die BC aber zu der CA wie die CE zu der ED; so verhält sich auch (5, 22. S.) *gleichförmig* die BA zu der AC wie die CD zu der DE.



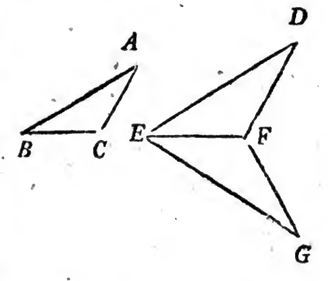
Demnach sind in gleichwinkeligen Dreyecken die Seiten u. s. w. w. z. e. w.

5. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey Dreyecke proportionirte Seiten haben, so sind die Dreyecke gleichwinkelig, und die Winkel welchen homologe Seiten gegenüberliegen, sind in beyden einander gleich.

Es seyen die zwey Dreyecke ABC, DEF, welche proportionirte Seiten haben, so, daſs die AB zu der BC sich verhalte, wie DE zu der EF, die BC aber zu der CA wie die EF zu FD, und die BA zu der AC wie die ED zu der DF, so behaupte ich, daſs das Dreyeck ABC dem Dreyecke DEF gleichwinkelig sey, und daſs in beyden die Winkel, welchen homologe Seiten gegenüberliegen, einander gleich seyen, nämlich der Winkel ABC dem Winkel DEF, der Winkel BCA dem Winkel EFD, und der Winkel BAC dem Winkel EDF.

Beweis. Man seze (1, 23. S.) an die Punkte E, F der Linie EF, den Winkel FEG, der dem Winkel ABC, und den Winkel EFG, der dem Winkel BCA gleich sey, so



so ist (1, 32. S.) auch der übrige Winkel BAC dem übrigen Winkel EGF gleich; folglich ist das Dreyeck ABC dem Dreyecke EGF gleichwinkelig, und es sind daher (5, 4. S.) in den Dreyecken ABC, EGF die Seiten, welche um die gleichen Winkel liegen, proportionirt, und die, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, homolog; folglich verhält sich die AB zu der BC wie die GE zu der EF. Aber wie die AB zu der BC sich verhält, so verhält sich die DE zu der EF; folglich verhält sich (5, 11. S.) die DE zu der EF wie die GE zu der EF; die beyden DE, GE haben also zu der EF einerley Verhältnifs, und mithin ist (5, 9. S.) die DE der GE gleich, Aus eben dem Grunde ist auch die DF der GF gleich. Da nun die DE der EG gleich, die EF aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden DE, EF den beyden GE, EF gleich, und die Grundlinie DF ist der Grundlinie GF gleich; folglich ist (1, 8. S.) auch der Winkel DEF dem Winkel GEF, und das Dreyeck DEF dem Dreyecke GEF gleich, auch sind in beyden die übrigen Winkel, welchen gleiche Setien gegenüberliegen, einander gleich; folglich ist der Winkel DFE dem Winkel GFE, der Winkel EDF aber dem Winkel EGF gleich, Und da der Winkel DEF dem Winkel GEF, der Winkel GEF aber dem Winkel ABC gleich ist, so ist auch der Winkel ABC dem Winkel DEF gleich. Aus eben dem Grunde ist auch der Winkel ACB dem Winkel DFE, und der Winkel bey A dem Winkel bey D gleich; folglich das Dreyeck ABC dem Dreyecke DEF gleichwinkelig.

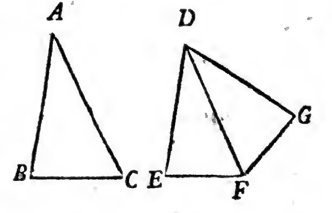
Wenn demnach zwey Dreyecke proportionirte Seiten haben u. s. w. w. z. e. w.

6. *Saz.*

6. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn in zwey Dreyecken ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich iſt, nnd die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt ſind, ſo ſind die Dreyecke gleichwinkelig, und in beyden die Winkel, welchen homologe Seiten gegenüberliegen, einander gleich.

Es ſeyen die zwey *Dreyecke* ABC, DEF, und ein Winkel BAC des einen einem Winkel EDF des andern gleich, auch die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt, ſo, daſs die BA zu der AC ſich verhalte, wie die ED zu der DF, ſo behaupte ich, daſs das *Dreyeck* ABC dem Dreyecke DEF gleichwinkelig, und der Winkel ABC dem Winkel DEF, der Winkel ACB aber dem Winkel DFE gleich ſey.



Beweis. Man ſeze (1, 23. S.) an die Punkte D, F, der Linie DF den Winkel FDG, der dem Winkel BAC oder EDF, und den Winkel DFG der dem Winkel ACB gleich ſey, ſo iſt (1, 32. S.) auch der übrige Winkel bey B dem übrigen Winkel bey G gleich, folglich das Dreyeck ABC dem Dreyecke DGF gleichwinkelig und mithin verhält ſich (6, 4. S.) die BA zu der AC wie die GD zu der DF. Nach der Vorausſezung aber verhält ſich die BA zu der AC wie die ED zu der DF; folglich verhält ſich (5, 11. S.) auch die ED zu der DF wie die GD zu der DF, und mithin iſt (5, 9. S.) die ED der DG gleich, die DF aber iſt gemeinſchaftlich; folglich ſind die beyden ED, DF den beyden GD, DF gleich, auch iſt der Winkel EDF dem Winkel GDF gleich; folglich iſt (1, 4. S.) auch die Grundlinie EF der Grundlinie FG, und das Dreyeck DEF dem Dreyecke GDF gleich, auch ſind die übrigen Winkel in beyden, denen gleiche

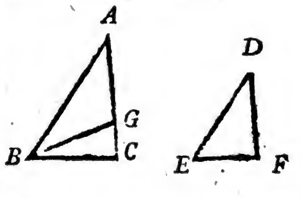
Sei-

Seiten gegenüberliegen, einander ſtückweiſe gleich, der Winkel DFG alſo iſt dem Winkel DEF, der Winkel bey G aber dem Winkel bey E gleich. Aber der Winkel DFG iſt dem Winkel ACB gleich; folglich iſt auch der Winkel ACB dem Winkel DEF gleich. Nach der Vorausſezung aber iſt der Winkel BAC dem Winkel dem EDF gleich; folglich iſt (I, 32. S.) auch der übrige Winkel bey B dem übrigen Winkel bey E gleich, und mithin das *Dreyeck* ABC dem Dreyecke DEF gleichwinkelig.

Wenn demnach in zwey *Dreyecken* ein Winkel des einen u. ſ. w. w. z. e. w.

7. *Saz.*

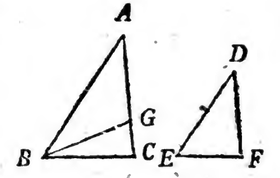
Lehrſaz. Wenn in zwey Dreyecken ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich iſt, die um zwey andere Winkel liegende Seiten aber proportionirt ſind, und von den übrigen Winkeln jeder zugleich entweder kleiner, oder nicht kleiner, als ein rechter, iſt, ſo ſind die Dreyecke gleichwinkelig und in beyden die Winkel, um welche die proportionirten Seiten liegen, einander gleich.



Es ſeyen die Dreyecke ABC, DEF, und darin der Winkel BAC dem Winkel EDF gleich, auch die Seiten, welche um zwey andere Winkel ABC, DEF liegen, proportionirt, ſo daſs die AB zu der BC ſich verhalte wie die DE zu der EF, auch ſey von den übrigen Winkeln bey C, F *erſtens* jeder zugleich kleiner, als ein rechter, ſo behaupte ich, daſs das *Dreyeck* ABC dem *Dreyecke* DEF gleichwinkelig, und der Winkel ABC dem Winkel DEF, auch der übrige Winkel bey C dem übrigen Winkel bey F gleich ſey.

Beweis. Wäre der Winkel ABC dem Winkel DEF nicht gleich, ſo würde der eine von ihnen gröſſer, als der andere, ſeyn. Es ſey der ABC der gröſſere, und man

man seze (1, 23. S.) an den Punkt B der Linie AB den Winkel ABG, der dem Winkel DEF gleich sey.



*D*a nun der Winkel A dem Winkel D, und der Winkel ABG dem Winkel DEF gleich ist, so ist (1, 32. S.) auch der übrige Winkel AGB dem übrigen Winkel DEF gleich, folglich das Dreyeck ABG dem Dreyecke DEF gleichwinkelig, und mithin verhält sich (6, 4. S.) die AB zu der BG wie die DE zu der EF. Nach der Voraussezung aber verhält sich die AB zu der BC wie die DE zu der EF; folglich verhält sich (5, 11. S.) die AB zu der BC wie die AB zu der BG, und mithin hat die AB zu den beyden BC, BG einerley Verhältniss, es ist also die BC der BG, uud daher (1, 5. S.) auch der Winkel BGC dem Winkel BCG gleich. Nach der Voraussezung aber ist der Winkel bey C kleiner, als ein rechter; folglich ist auch der Winkel BGC kleiner, als ein rechter, und mithin (1, 13. S.) sein Nebenwinkel AGB grösser, als ein rechter. Es ist aber gezeigt worden, dass der Winkel AGB dem Winkel bey F gleich sey; folglich ist auch der Winkel bey F grösser, als ein rechter. Nach der Voraussezung aber ist er kleiner, als ein rechter, welches ungereimt ist. Es ist also der Winkel ABC dem Winkel DEF nicht ungleich, folglich gleich. Es ist aber auch der Winkel bey A dem Winkel bey D gleich; folglich ist auch der übrige Winkel bey C dem übrigen Winkel bey F gleich, uud mithin das Dreyeck ABC dem Dreyecke DEF gleichwinkelig.

Man seze aber nun jeder der Winkel bey C, F sey zugleich nicht kleiner, als ein rechter, so behaupte ich, dass auch dann das *D*reyeck ABC dem Dreyecke DEF gleichwinkelig sey.

Nach der vorigen Construction kann auf gleiche Art gezeigt werden, dass die BC der BG, und der Winkel bey C dem Winkel BGC gleich sey. Aber der Winkel bey C ist nicht

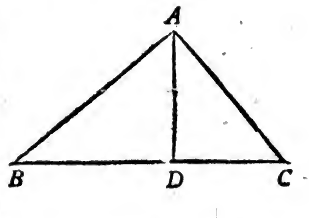
nicht kleiner, als ein rechter; folglich ist auch der Winkel BGC nicht kleiner, als ein rechter. In dem Dreyecke BGC sind also zwey Winkel nicht kleiner, als zwey rechte, welches (1, 17. S.) unmöglich ist. Es ist also wiederum der Winkel ABC dem Winkel DEF nicht ungleich, folglich gleich. Es ist aber auch der Winkel bey A dem Winkel bey D gleich; folglich ist (1, 32. S.) auch der übrige Winkel bey C dem übrigen Winkel bey F gleich, und mithin das Dreyeck ABC dem Dreyecke DEF gleichwinkelig.

Wenn demnach in zwey Dreyecken ein Winkel des einen u. s. w. w. z. e. w.

8. *Saz.*

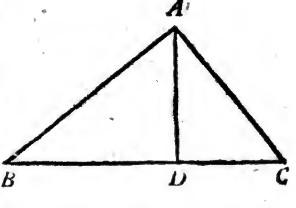
Lehrsaz. Wenn in einem rechtwinkeligen Dreyecke von dem rechten Winkel nach der Grundlinie ein Loth gefällt wird, so sind die an dem Lothe liegenden Dreyecke sowohl dem ganzen als auch einander selbst ähnlich.

Es sey das rechtwinkelige Dreyeck ABC, dessen Winkel BAC, ein rechter, und man fälle von dem Punkte A nach der BC das Loth AD, so behaupte ich, daſs die beyden Dreyecke ABD, ADC sowohl dem ganzen ABC, als auch einander selbst, ähnlich seyen.



Beweis. Da der Winkel BAC dem Winkel ADB gleich, indem jeder ein rechter ist, und der Winkel bey B den beyden Dreyecken ABC, ABD gemeinschaftlich ist, so ist (1, 32. S.) der übrige Winkel ACB dem übrigen Winkel BAD gleich, und mithin das Dreyeck ABC dem Dreyecke ABD gleichwinkelig. Demnach verhält sich (6, 4. S.) die BC, als Gegenseite des rechten Winkels in dem Dreyecke ABC, zu der BA, als Gegenseite des rechten Winkels in dem

Drey-



Dreyecke ABD, wie dieselbe AB, als Gegenseite des Winkels C in dem Dreyecke ABC, zu der BD, als Gegenseite des dem Winkel bey C gleichen Winkels BAD in dem Dreyecke ABD, und eben so auch die AC zu der AD, als Gegenseite des den beyden Dreyecken gemeinschaftlichen Winkels bey B; demnach ist das Dreyeck ABC dem Dreyecke ABD gleichwinkelig, und in beyden sind die um die gleichen Winkel liegende Seiten proportionirt; folglich ist (6, 1. Erkl.) das Dreyeck ABC dem Dreyecke ABD ähnlich.

Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, daſs auch das Dreyeck ADC dem Dreyecke ABC ähnlich sey; folglich sind die beyden Dreyecke ABD, ADC dem ganzen Dreyecke ABC ähnlich.

Ich behaupte ferner, daſs die Dreyecke ABD, ADC, auch einander selbst ähnlich seyen.

Denn da der Winkel BDA, als ein rechter, dem rechten Winkel ADC gleich ist, aber auch von dem Winkel BAD gezeigt worden ist, daſs er dem Winkel bey C gleich sey, so ist (1, 32. S.) auch der übrige Winkel bey B dem übrigen Winkel DAC gleich, und mithin das Dreyeck ABD dem Dreyecke ADC gleichwinkelig; folglich verhält sich (6, 4. S.) die BD, als Gegenseite des Winkels BAD in dem Dreyecke ABD, zu der DA, als Gegenseite des dem Winkel BAD gleichen Winkels C in dem Dreyecke ADC, wie dieselbe AD, als Gegenseite des Winkels B in dem Dreyecke ABD zu der DC, als Gegenseite des dem Winkel B gleichen Winkels DAC in dem Dreyecke ADC, und eben so auch die BA, als Gegenseite des rechten Winkels ADB, zu der AC, als Gegenseite des rechten Winkels ADC; folglich ist (6, 1. Erkl.) das Dreyeck ABD dem Dreyecke ADC ähnlich.

Wenn

Wenn demnach in einem rechtwinkeligen Dreyecke vom rechten Winkel u. s. w. w. z. e. w.

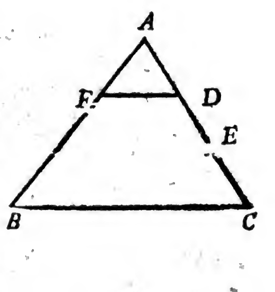
Zusaz. Hieraus erhellet, dass in dem rechtwinkeligen Dreyecke das von dem rechten Winkel nach der Grundlinie gefällte Loth zwischen den Abschnitten der Grundlinie, und die an jedem Abschnitte liegende Seite zwischen der Grundlinie und diesem Abschnitte die mittlere Proportionallinie sey.

9. *Saz.*

Aufgabe. Von einer gegebenen geraden Linie einen verlangten Theil abzuschneiden.

Es sey die gegebene gerade Linie AB und man soll von der AB einen verlangten Theil abschneiden.

Auflösung. Es werde der dritte Theil verlangt, so ziehe man von dem Punkte A eine gerade Linie AC, welche mit der AB einen beliebigen Winkel einschliesse; hierauf nehme man in der AC einen Punkt D an, und mache (1, 3. S.) der AD die DE, EC gleich, endlich ziehe man die BC und (1, 31. S.) durch den Punkt D mit der BC die DF parallel.



Beweis. Da nun mit der Seite BC des Dreyecks ABC die FD parallel gezogen worden ist, so verhält sich (6, 2. S.) die CD zu der DA wie die BF zu der FA. Es ist aber die CD das Doppelte von der DA, folglich ist auch die BF das Doppelte von der FA, und mithin die BA das Dreyfache von der AF.

Demnach ist von der gegebenen geraden Linie AB der verlangte dritte Theil abgeschnitten worden, w. z. v. w.

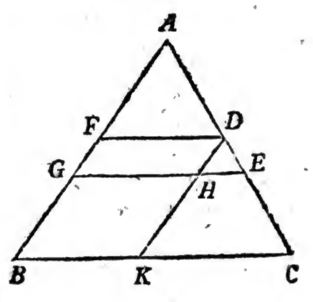
10. *Saz.*

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie auf ähnliche Art zu theilen, wie eine andere gegebene getheilt ist.

Es sey die gegebene ganze Linie AB, die getheilte AC, und man soll die ganze AB auf ähnliche Art theilen, wie die AC getheilt ist.

Auflösung. Es sey die AC in den Punkten D, E getheilt, und man bringe beyde Linien so an einander, dass sie einen beliebigen Winkel einschliessen, und ziehe alsdann die BC und durch die Punkte D, E (1, 31. S.) der BC die DF, EG, durch den Punkt D aber der AB die DHK parallel.

Beweis. Jede der Figuren FH, HB ist ein Parallelogramm, und daher (1, 35. S.) die DH der FG, die HK aber der GB gleich. Da nun mit der Seite KC des Dreyecks DKC die HE parallel gezogen worden ist, so verhält sich (6, 2. S.) die CE zu der ED wie die KH zu der HD. Es ist aber die KH der BG, die HD aber der GF gleich; folglich verhält sich die CE zu der ED wie die BG zu der GF. Da ferner mit der Seite EG des Dreyecks AGE die FD parallel gezogen ist, so verhält sich die ED zu der DA wie die GF zu der FA. Es ist aber gezeigt worden, dass die CE zu der ED sich verhalte wie die BG zu der GF; folglich verhält sich die CE zu der ED wie die BG zu der GF, und die ED zu der DA wie die GF zu der FA.



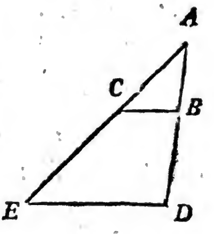
Demnach ist die gegebene ganze gerade Linie AB auf ähnliche Art, wie die gegebene getheilte gerade Linie AC, getheilt worden, w. z. v. w.

11. *Saz.*

Aufgabe. Zu zwey gegebenen geraden Linien die dritte Proportionallinie zu finden.

Es seyen die zwey gegebenen geraden Linien AB, AC, und man bringe sie so an einander, dass sie einen beliebigen Winkel einschliessen, man soll nun zu den beyden AB, AC die dritte Proportionallinie finden.

Auflösung. Man verlängere die AB, AC nach den Punkten D, E, mache der AC die BD gleich, ziehe hierauf die BC, und (1, 31. S.) durch den Punkt D mit der BC die DE parallel.



Beweis. Da mit der Seite DE des Dreyecks ADE die BC parallel gezogen worden, so verhält sich (6, 2. S.) die AB zu der BD wie die AC zu der CE. Es ist aber die BD der AC gleich; folglich verhält sich die AB zu der AC wie die AC zu der CE.

Demnach ist zu den zwey gegebenen geraden Linien AB, AC die dritte Proportionallinie CE gefunden worden, w. z. v. w.

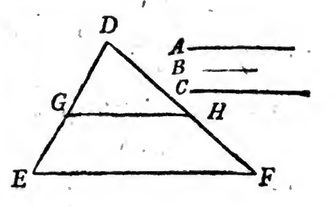
12. *Saz.*

Aufgabe. Zu drey gegebenen geraden Linien die vierte Proportionallinie zu finden.

Es seyen die drey gegebenen geraden Linien A, B, C, man soll zu den dreyen A, B, C die vierte Proportionallinie finden.

Auflösung. Man bringe die Linien DE, DF unter einem beliebigen Winkel EDF an einander, und mache der A die DG, der B aber die GE, und der C die DH gleich. Hierauf ziehe man die GH, und mit ihr durch den Punkt E die EF parallel.

Beweis. Da mit der Seite EF des Dreyecks DEF die GH parallel gezogen worden, so verhält sich (6, 2. S.) die DG zu der GE wie die DH zu der HF. Es ist aber die DG der A, die GE der B, und die DH der C gleich; folglich verhält sich die A zu der B wie C zu der HF.



Demnach ist zu den drey gegebenen geraden Linien A, B, C die vierte Proportionallinie HF gefunden worden, w. z. v. w.

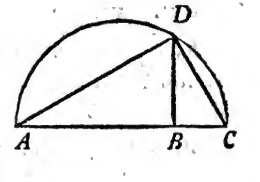
13. *Saz.*

Aufgabe. Zu zwey gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden.

Es seyen die zwey gegebenen geraden Linien AB, BC, und man soll zu den beyden AB, BC die mittlere Proportionallinie finden.

Auflösung. Man bringe sie in *eine* gerade Linie an einander, beschreibe alsdann über der AC einen Halbkreis ADC, errichte in dem Punkte B (1, 11. S.) auf der AC die BD lothrecht, und ziehe die AD, DC.

Beweis. Da der Winkel ADC ein Winkel im Halbkreise ist, so ist er (3, 31. S.) ein rechter. Da nun in dem rechtwinkeligen Dreyecke ADC von dem rechten Winkel aus nach der Grundlinie das Loth DB gefällt worden ist, so ist (6, 8. Zus.) die DB die mittlere Proportionallinie zwischen den Abschnitten AB, BC der Grundlinie.



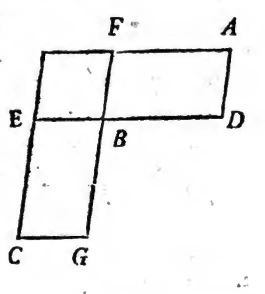
Dem-

Demnach ist zu den zwey gegebenen geraden Linien AB, BC, die mittlere Proportionallinie DB gefunden worden, w. z. v. w.

14. *Saz.*

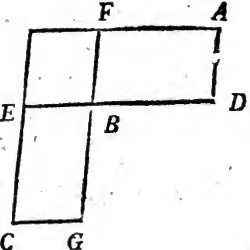
Lehrsaz. In gleichen Parallelogrammen, die einen gleichen Winkel haben, sind die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportionirt; und Parallelogramme, die einen gleichen Winkel haben, und in welchen die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportionirt sind, sind einander gleich.

Es seyen die gleichen Parallelogramme AB, BC, und in beyden die Winkel bey B einander gleich, und man bringe ihre Seiten DB, BE in *eine* gerade Linie, so sind (1, 14. S.) auch die Seiten FB, BG in *einer* geraden Linie, und ich behaupte, dass die Seiten der Parallelogramme AB, BC, welche um die gleichen Winkel liegen, umgekehrt proportionirt seyen, das heisst, dass die DB zu der BE sich verhalte wie die GB zu der BF.



Beweis. Man vollende das Parallelogramm FE. Da nun das Parallelogramm AB dem Parallelogramme BC gleich, FE aber ein anderes Parallelogramm ist, so verhält sich (5, 7. S.) die Figur AB zu der FE wie die BC zu der FE. Aber (6, 1. S.) verhält sich die Figur AB zu der FE wie die Seite DB zu der BE, und die Figur BC zu der FE wie die Seite GB zu der BF; folglich (5, 11. S.) die DB zu der BE wie die GB zu der BF. Demnach sind die Seiten der Parallelogramme AB, BC, welche um die gleichen Winkel liegen, umgekehrt proportionirt.

Es



Es ſeyen aber nun die Seiten, welche um die gleichen Winkel liegen, umgekehrt proportionirt, und es verhalte ſich die DB zu zu der BE wie die GB zu der BF, ſo behaupte ich, daſs das Parallelogramm AB dem Parallelogramme BC gleich ſey.

Da die DB zu der BE ſich verhält wie die GB zu der BF, aber (6, I. S.) das Parallelogramm AB zu dem Parallelogramme FE wie die DB zu der BE, und das Parallelogramm BC zu dem Parallelogramme FE wie die GB zu der BF, ſo verhält ſich (5, 11. S.) die Figur AB zu der FE wie die BC zu der FE, und mithin iſt (5, 9. S.) das Parallelogramm AB dem Parallelogramme BC gleich.

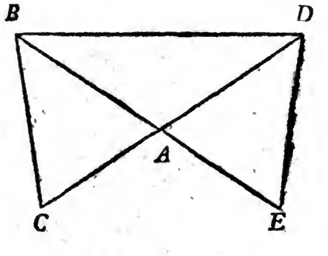
Demnach ſind in gleichen Parallelogrammen welche einen gleichen Winkel haben u. ſ. w. w. z. e. w.

15. *Saz.*

Lehrſaz. In gleichen Dreyecken, welche einen gleichen Winkel haben, ſind die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportionirt; und Dreyecke, welche einen gleichen Winkel haben, und in welchen die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportionirt ſind, ſind einander gleich.

Es ſeyen die gleichen Dreyecke ABC, ADE, in welchen der Winkel BAC des einen dem Winkel DAE des andern gleich ſey, ſo behaupte ich, daſs in den Dreyecken ABC, ADE die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportionirt ſeyen, das heiſst, daſs die CA zu der AD ſich verhalte wie die AE zu der AB.

Be-



Beweis. Man bringe sie so an einander, dass die CA mit der AD in *einer* geraden Linie liege, so ist (1, 14. S.) auch die EA mit der AB in *einer* geraden Linie. Man ziehe die BD. Da nun das Dreyeck ABC dem ADE gleich, ABD aber ein anderes Dreyeck ist, so verhält sich (5, 7. S.) das Dreyeck CAB zum Dreyecke BAD wie das Dreyeck ADE zum Dreyecke BAD. Aber (6, 1. S.) verhält sich das Dreyeck CAB zum Dreyecke BAD, wie die CA zu der AD, und das Dreyeck EAD zum Dreyecke BAD wie die EA zu der AB; folglich verhält sich (5, 11. S.) die CA zu der AD wie die EA zu der AB. Demnach sind die Seiten der Dreyecke ABC, ADE, welche um die gleichen Winkel liegen, umgekehrt proportionirt.

Es seyen aber nun die Seiten der Dreyecke ABC, ADE umgekehrt proportionirt, und es verhalte sich die CA zu der AD wie die EA zu der AB, so behaupte ich, dass das Dreyeck ABC dem Dreyecke ADE gleich sey.

Man ziehe wiederum die BD. Da nun die CA zu der AD sich verhält wie die EA zu der AB, aber (6, 1. S.) das Dreyeck ABC zum Dreyecke BAD wie die CA zu der AD, und das Dreyeck EAD zum Dreyecke BAD wie die EA zu der AB, so verhält sich (5, 11. S.) das Dreyeck ABC zum Dreyecke ABD wie das Dreyeck ADE zum Dreyecke ABD. Die beyden Dreyecke ABC, ADE also haben zu dem Dreyecke ABD einerley Verhältniss; folglich ist (5, 9. S.) das Dreyeck ABC dem Dreyecke ADE gleich.

Demnach sind in gleichen *Dreyecke*, die einen gleichen Winkel haben u. s. w. w. z. e. w.

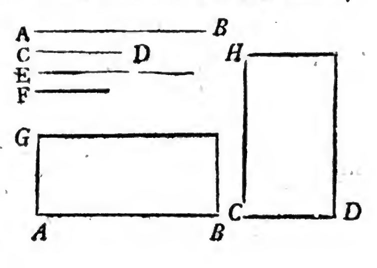
16. *Saz.*

16. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn vier gerade Linien proportionirt ſind, ſo iſt das Rechteck, das von den äuſſeren eingeſchloſſen wird, dem Rechtecke, das von den mittleren eingeſchloſſen wird, gleich; und wenn das Rechteck, das von den äuſſeren eingeſchloſſen wird, dem Rechtecke, das von den mittleren eingeſchloſſen wird, gleich iſt, ſo ſind die vier geraden Linien proportionirt.

Es ſeyen die vier geraden Linien AB, C*D*, E, F proportionirt, ſo daſs die AB ſich zu der C*D* verhalte wie die E zu der F, ſo behaupte ich, daſs das Rechteck, das von den Linien AB, F eingeſchloſſen wird, dem Rechtecke das von den Linien C*D*, E eingeſchloſſen wird, gleich ſey.

Beweis. Man errichte (1, 11. S.) in den Punkten A, C, auf den Linien AB, C*D* die AG, CH lothrecht, mache der F die AG, der E aber die CH gleich, und vollende die Parallelogramme BG, *D*H.



Da nun die AB zu der C*D* ſich verhält wie die E zu der F, die E aber der CH, und die F der AG gleich iſt, ſo verhält ſich (5, 7. S.) die AB zu der C*D* wie die CH zu der AG; folglich ſind in den Parallelogrammen BG, *D*H die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportionirt. Gleichwinkelige Parallelogramme aber, in welchen die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportionirt ſind, ſind (6, 14. S.) einander gleich; folglich iſt das Parallelogramm BG dem Parallelogramme *D*H gleich. Das Parallelogramm BG aber wird von den Linien AB, F eingeſchloſſen, denn die AG

iſt

ist der F gleich, das Parallelogramm *D*H hingegen von den Linien C*D*, E, denn die CH ist der E gleich; folglich ist das Reckteck, das von den Linien AB, F eingeschlossen wird, dem Rechtecke, das von den Linien C*D*, E eingeschlossen wird, gleich.

Es sey aber nun das Rechteck, das von den Linien AB, F eingeschlossen wird, dem Rechtecke, das von den Linien C*D*, E eingeschlossen wird, gleich, so behaupte ich, daſs die vier geraden Linien proportionirt seyen, daſs nämlich die AB zu der C*D* sich verhalte wie die E zu der F.

Da nach der vorigen Construction, das Rechteck, das von den Linien AB, F eingeschlossen wird, dem Rechtecke, das von den Linien C*D*, E eingeschlossen wird, gleich ist, BG aber das von den Linien AB, F eingeschlossene Rechteck ist, weil die AG der F gleich ist, *D*H hingegen das von den Linien C*D*, E eingeschlossene Rechteck ist, weil die CH der E gleich ist, so ist das Parallelogramm BG dem Parallelogramme *D*H gleich, auch sind sie gleichwinkelig. In gleichen und gleichwinkeligen Parallelogrammen aber sind die um die gleichen Winkel liegenden Seiten (6, 14. S.) umgekehrt proportionirt; folglich verhält sich die AB zu der C*D* wie die CH zu der AG. Es ist aber die CH der E, und die AG der F gleich; folglich verhält sich die AB zu der C*D* wie die E zu der F.

Wenn demnach vier gerade Linien proportionirt sind u. s. w. w. z. e. w.

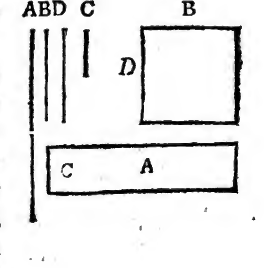
17. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn drey gerade Linien proportionirt sind, so ist das Rechteck, das von den beyden äuſsern eingeschlossen wird, dem Quadrate der mittleren gleich; und wenn das Rechteck, das von den beyden äuſseren eingeschlossen wird, dem Quadrate der mittleren gleich ist, so sind die drey geraden Linien proportionirt.

Es

Es seyen die drey geraden Linien A, B, C, proportionirt, so daſs die A zu der B sich verhalte, wie die B zu der C, so behaupte ich, daſs das Rechteck, das von den Linien A, C eingeschlossen wird, dem Quadrate der mittleren B gleich sey.

Beweis. Man mache der B die *D* gleich.



*D*a nun die A zu der B sich verhält, wie die B zu der C, die B aber der *D* gleich ist, so verhält sich auch die A zu der B wie die *D* zu der C. Wenn aber vier gerade Linien proportionirt sind, so ist (6, 16. S.) das von den äussern eingeschlossene Rechteck dem von den mittlern eingeschlossenen Rechtecke gleich; folglich ist das von den Linien A, C eingeschlossene Rechteck dem von den Linien B, *D* eingeschlossenen Rechtecke gleich. Aber das von den Linien B, *D* eingeschlossene Rechteck ist dem Quadrate der B gleich, denn die B selbst ist der *D* gleich; folglich ist das Rechteck, das von den Linien A, C eingeschlossen wird, dem Quadrate der Linie B gleich.

Es sey nun aber das Rechteck, das von den Linien A, C eingeschlossen wird, dem Quadrate der Linie B gleich, so behaupte ich, daſs die A zu der B sich verhalte wie die B zu der C.

Da, nach der vorigen Construction, das von den Linien A, C eingeschlossene Rechteck dem Quadrate der B gleich ist, das Quadrat der B aber dem von den Linien B, D eingeschlossenen Rechtecke gleich ist, weil die B selbst der *D* gleich ist, so ist das von den Linien A, C eingeschlossene Rechteck dem von den Linien B, *D* eingeschlossenen gleich. Wenn aber das von den äusseren eingeschlossene Rechteck dem von den mittleren eingeschlossenen gleich ist, so sind (6, 16. S.) die vier geraden Linien proportionirt; folglich verhält sich die A zu der B wie die *D* zu

der

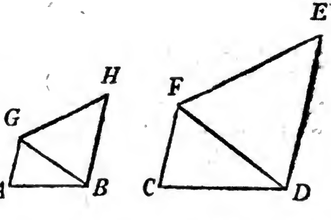
der C. Die B aber ist der *D* gleich, folglich verhält sich auch die A zu der B wie die B zu der C.

Wenn demnach drey gerade Linien proportionirt sind u. s. w. w. z. e. w.

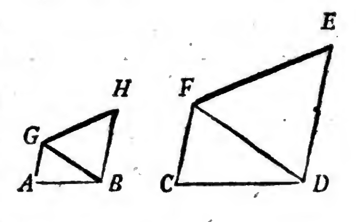
18. *Saz.*

Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie eine geradlinige Figur zu beschreiben, die einer andern gegebenen ähnlich sey, und ähnlich liege.

Es sey die gegebene gerade Linie AB, die gegebene geradlinige Figur CE, und man soll auf der Linie AB eine geradlinige Figur beschreiben, die der CE ähnlich sey, und ähnlich liege.



Auflösung u. Beweis. Man ziehe die *D*F, und seze (1, 23. S.) an die Punkte A, B der geraden Linie AB den Winkel GAB, der dem Winkel C, und den Winkel ABG, der dem Winkel C*D*F gleich sey, so ist (1, 32. S.) auch der übrige Winkel AGB dem übrigen Winkel CF*D* gleich, folglich das Dreyeck F*D*C dem Dreyecke GAB gleichwinkelig, und mithin verhält sich (6, 4. S.) die F*D* zu der GB wie die FC zu der GA, und wie die C*D* zu der AB. Man seze ferner an die Punkte B, G der Linie BG den Winkel BGH, der dem Winkel *D*FE, und den Winkel GBH, der dem Winkel F*D*E gleich sey, so ist auch der übrige Winkel bey H dem übrigen Winkel bey E gleich, und mithin das Dreyeck F*D*E dem Dreyecke GBH gleichwinkelig; folglich (6, 4. S.) die F*D* zu der GB wie die FE zu der GH, und wie die E*D* zu der HB. Es ist aber gezeigt worden, dass auch die F*D* zu der BG sich verhalte wie die FC zu der GA, und wie die C*D* zu der AB; folglich



lich verhält sich auch (5, 11, S.) die FC zu der GA wie die C*D* zu der AB, wie die FE zu der GH, und wie die E*D* zu der HB. Da nun der Winkel CF*D* dem Winkel AGB, der Winkel *D*FE aber dem Winkel BGH gleich ist, so ist der ganze Winkel CFE dem ganzen Winkel AGH gleich. Aus eben dem Grunde ist auch der Winkel C*D*E dem Winkel ABH gleich, überdies ist auch der Winkel bey C dem Winkel bey A, und der Winkel bey E dem Winkel bey H gleich; demnach ist die Figur AH der CE gleichwinkelig und in beyden sind die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt; folglich ist (6, 1. Erkl.) die geradlinige Figur AH der geradlinigen Figur CE ähnlich.

Demnach ist auf der gegebenen geraden Linie AB eine geradlinige Figur AH beschrieben worden, die der gegebenen geradlinigen Figur CE ähnlich ist und ähnlich liegt, w. z. v. w.

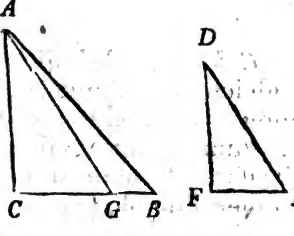
19. *Saz.*

Lehrsaz. Aehnliche Dreyecke sind in zweymal höherem Verhältnisse ihrer homologen Seiten.

Es seyen die ähnlichen Dreyecke ABC, *D*EF, in welchen der Winkel bey B dem Winkel bey E gleich sey, und es verhalte sich die AB zu der BC wie die *D*E zu der EF, und es sey also (5, 13. Erkl.) die Seite BC der EF homolog, so behaupte ich, daſs das Dreyeck ABC zu dem Dreyecke *D*EF ein zweymal höheres Verhältniſs habe, als die Seite BC zu der EF.

Beweis. Man nehme (6, 11. S.) zu den beyden BC, EF die dritte Proportionallinie BG, und es verhalte sich die

die BC zu der EF, wie die EF zu der BG, hierauf ziehe man die GA.



Da nun die AB zu der BC ſich verhält wie die *D*E zu der EF, ſo verhält ſich auch *verwechſelt* (5, 16. S.) die AB zu der *D*E wie die BC zu der EF. Aber wie die BC zu der EF, ſo verhält ſich die EF zu der BG; folglich (1, 32. S.) auch die AB zu der *D*E wie die EF zu der BG; es ſind alſo in den Dreyecken ABG, *D*EF die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proporotionirt. Dreyecke aber, die einen gleichen Winkel haben, und in welchen die um die gleichen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportionirt ſind, ſind (6, 15. S.) einander gleich; folglich iſt das Dreyeck ABG dem Dreyecke E*D*F gleich. Und da die BC zu der FE ſich verhält, wie die EF zu der BG, wenn aber drey gerade Linien proportionirt ſind, die erſte zur dritten (5, 10. Erkl.) ein zweymal höheres Verhältniſs hat, als zur zweyten, ſo hat die BC zu der BG ein zweymal höheres Verhältniſs, als die BC zu der EF. Aber wie die BC zu der BG ſich verhält ſo verhält ſich (6, 1. S.) das Dreyeck ABC zum Dreyecke ABG; folglich hat auch das Dreyeck ABC zum Dreyecke ABG ein zweymal höheres Verhältniſs, als die BC zu der EF. Das Dreyeck ABG aber iſt dem Dreyecke *D*EF gleich; folglich hat (5, 7. S.) auch das Dreyeck ABC zu dem Dreyecke *D*EF ein zweymal höheres Verhältniſs, als die BC zu der EF.

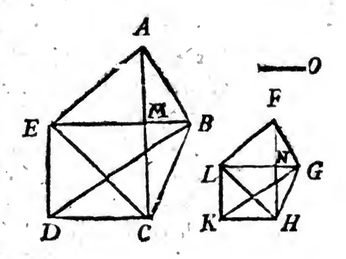
Demnach ſind ähnliche Dreyecke u. ſ. w. w. z. e. w.

Zuſaz. Da gezeigt worden iſt, daſs das Dreyeck ABC zum Dreyecke ABG, das heiſst zum Dreyecke *D*EF, ſich verhalte, wie die CB zu der BG, ſo erhellet hieraus, daſs wenn drey gerade Linien proportionirt ſind, die erſte zur dritten ſich verhalte, wie das Dreyeck über der erſten zu dem ihm ähnlichen und ähnlich liegenden Dreyecke über der zweyten.

20. *Saz.*

Lehrſaz. Aehnliche Polygone laſſen ſich in gleichviele ähnliche und den Ganzen homologe Dreyecke theilen. Und ein Polygon hat zum andern ein zweymal höheres Verhältniſs, als eine homologe Seite des einen zu einer homologen Seite des andern.

Es ſeyen die ähnlichen Polygone ABCDE, FGHKL, und die Seite AB der FG homolog, ſo behaupte ich, daſs die Polygone ABCDE, FGHKL in gleichviele ähnliche und den Ganzen homologe Dreyecke ſich theilen laſſen, und daſs das Polygon ABCDE zu dem Polygone FGHKL ein zweymal höheres Verhältniſs habe, als die Seite AB zu der FG.

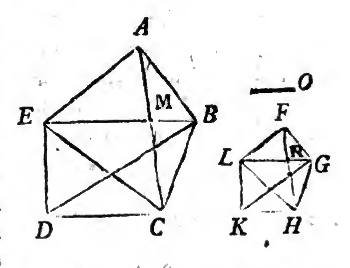


Beweis. Man ziehe die Linien BE, EC, GL, LH. Da das Polygon ABCDE dem Polygone FGHKL ähnlich iſt, ſo iſt der Winkel BAE dem Winkel GFL gleich, und es verhält ſich die BA zu der AE wie die GF zu der FL. Da nun ABE, FGL zwey Dreyecke ſind, die einen gleichen Winkel haben, und in welchen die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt ſind, ſo iſt (6, 6. S.) das Dreyeck ABE dem Dreyecke FGL gleichwinkelig; folglich (6, 4. S.) auch ähnlich. Demnach iſt der Winkel ABE dem Winkel FGL gleich. Wegen der Aehnlichkeit der Polygone aber iſt auch der ganze Winkel ABC dem ganzen FGH gleich; folglich auch der Reſt EBC dem Reſte LGH. Da nun wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke ABE, FGL die EB zu der BA ſich verhält wie die LG zu der GF, aber auch, wegen der Aehnlichkeit der Polygone, die AB zu der BC wie die FG zu der GH, ſo verhält ſich (5, 22. S.)

S.) auch *gleichförmig* die EB zu der BC wie die LG zu der GH; es ſind alſo die um die gleichen Winkel EBC, LGH liegenden Seiten proportionirt, folglich (6, 6. S.) das Dreyeck EBC dem Dreyecke LGH gleichwinkelig, und mithin (6, 4. S.) auch ähnlich. Aus eben den Gründen iſt auch das Dreyeck ECD dem Dreyecke LHK ähnlich, folglich laſſen ſich die ähnlichen Polygone ABCDE, FGHKL in gleichviele ähnliche Dreyecke theilen.

Ich behaupte ferner, daſs ſie auch den Ganzen homolog ſeyen, das heiſst, daſs die Dreyecke auch proportionirt ſeyen, und zwar ſo, daſs ABE, EBC, ECD Vorderglieder, FGL, LGH, LHK Hinterglieder ſeyen, und daſs das Polygon ABCDE zu dem Polygone FGHKL ein zweymal höheres Verhältniſs habe, als eine homologe Seite des einen zu einer homologen Seite des andern, das heiſst, als die AB zu der FG.

Man ziehe die AC, FH. Da nun, wegen der Aehnlichkeit der Polygone, der Winkel ABC dem Winkel FGH gleich iſt, und die AB zu der BC ſich verhält wie die FG zu der GH, ſo iſt (6, 6. S.) das Dreyeck ABC dem Dreyecke FGH gleichwinkelig; folglich iſt der Winkel BAC dem Winkel GFH, der Winkel BCA aber dem Winkel GHF gleich. Da ferner der Winkel BAM dem Winkel GFN gleich iſt, von dem Winkel ABM aber gezeigt iſt, daſs er dem Winkel FGN gleich ſey, ſo iſt (1, 32. S.) auch der übrige Winkel AMB dem übrigen FNG gleich; folglich das Dreyeck ABM dem Dreyecke FGN gleichwinkelig. Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, daſs auch das Dreyeck BMC dem Dreyecke GNH gleichwinkelig ſey; folglich verhält ſich (6, 4. S.) die AM zu der MB wie die FN zu der NG, und die BM zu der MC wie die GN zu der NH; folglich (5, 22. S.) auch *gleichförmig*, die AM zu der MC wie die FN zu der NH. Aber wie die AM zu der MC, ſo verhält ſich das Dreyeck ABM zu dem Dreyecke MBC und das Dreyeck AME zu dem Dreyecke EMC, denn dieſe verhalten ſich (6, 1. S.) zu einander wie ihre Grundlinien



linien. Aber (5, 12. S.) verhält sich eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder wie alle Vorderglieder zusammen zu allen Hintergliedern zusammen; folglich verhält sich das Dreyeck AMB zum Dreyecke BMC wie das Dreyeck ABE zum Dreyecke CBE. Aber das Dreyeck AMB verhält sich zum Dreyecke BMC wie die AM zu der MC; folglich verhält sich auch (5, 11. S.) die AM zu der MC wie das Dreyeck ABE zum Dreyecke EBC. Aus eben den Gründen verhält sich auch die FN zu der NH wie das Dreyeck FGL zum Dreyecke GLH. Es verhält sich aber auch die AM zu der MC wie die FN zu der NH; folglich (5, 11. S.) das Dreyeck ABE zum Dreyecke EBC wie das Dreyeck FGL zum Dreyecke GLH, und (5, 16. S.) *verwechselt*, das Dreyeck ABE zum Dreyecke FGL wie das Dreyeck BEC zum Dreyecke GLH. Auf gleiche Art kann nun, wenn man die B*D*, GK zieht, gezeigt werden, dafs auch das Dreyeck EBC zum Dreyecke GLH sich verhalte wie das Dreyeck EC*D* zum Dreyecke LHK. Und da das Dreyeck ABE zum Dreyecke FGL sich verhält wie das Dreyeck EBC zum Dreyecke LGH, und wie das Dreyeck EC*D* zum Dreyecke LHK, und (5, 12. S.) eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder, wie alle Vorderglieder zusammen zu allen Hintergliedern zusammen, so verhält sich auch das Dreyeck ABE zum Dreyecke FGL wie das Polygon ABC*D*E zum Polygone FGHKL. Aber das Dreyeck ABE hat zu dem Dreyecke FGL ein zweymal höheres Verhältnifs, als die homologe Seite AB zu der homologen Seite FG, denn (6, 19. S.) sind ähnliche Dreyecke in zweymal höherem Verhältnisse ihrer homologen Seiten; folglich hat auch das Polygon ABC*DE* zu dem Polygone FGHKL ein zweymal höheres Verhältnifs, als die homologe Seite AB zu der homologen Seite FG.

Dem-

Demnach lassen sich ähnliche Polygone u. s. w. w. z. e. w.

Zusaz. 1. Auf gleiche Art kann auch von ähnlichen vierseitigen Figuren gezeigt werden, dass sie in zweymal höherem Verhältnisse ihrer homologen Seiten seyen. Es ist aber (6, 19. S.) auch von den Dreyecken gezeigt worden; folglich sind allgemein die ähnlichen geradlinigen Figuren in zweymal höherem Verhältnisse ihrer homologen Seiten.

Zusaz. 2. Nimmt man zu den beyden AB, FG die dritte Proportionallinie O, so hat (5, 10. Erkl.) die AB zu der O ein zweymal höheres Verhältniss, als die AB zu der FG. Es hat aber auch ein Polygon zu einem andern und eine vierseitige Figur zu einer andern ein zweymal höheres Verhältniss, als eine homologe Seite zu einer andern, das heisst, als die AB zu der FG. Und eben dieses ist auch von den Dreyecken gezeigt worden, folglich erhellet im allgemeinen, dass, wenn drey gerade Linien proportionirt sind, die erste zur dritten sich verhalte wie eine geradlinige Figur über der ersten zu der ihr ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigen Figur über der zweyten.

Anderer Beweis.

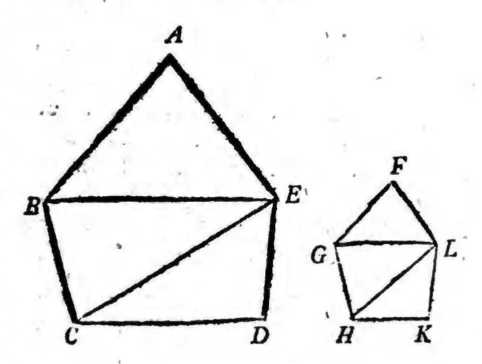
A B E C D F G L H K

Es kann auch auf eine andere Art kürzer gezeigt werden, dass die Dreyecke homolog seyen.

Es seyen wieder die Polygone ABCDE, FGHKL, und man ziehe die Linien BE, EC, GL, LH, so behaupte ich, dass das Dreyeck ABE zum Dreyecke FGL sich

 ver-

verhalte, wie das Dreyeck EBC zum Dreyecke LGH, und das Dreyeck CDE zum Dreyecke HKL.



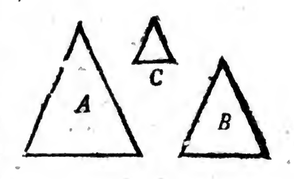
Da das Dreyeck ABE dem Dreyecke FGL ähnlich ist, so hat das Dreyeck ABE (6, 19. S.) zum Dreyecke FGL ein zweymal höheres Verhältniſs, als die BE zu der GL. Aus eben dem Grunde hat auch das Dreyeck BEC zum Dreyecke GLH ein zweymal höheres Verhältniſs, als die BE zu der GL; folglich verhält ſich (5, 11. S.) das Dreyeck ABE zum Dreyecke FGL wie das Dreyeck EBC zum Dreyecke LGH. Da ferner das Dreyeck EBC dem Dreyecke LGH ähnlich iſt, ſo hat (6, 19. S.) das Dreyeck EBC zum Dreyecke LGH ein zweymal höheres Verhältniſs, als die Linie CE zu der HL. Aus eben dem Grunde hat auch das Dreyeck ECD zum Dreyecke LHK ein zweymal höheres Verhältniſs, als die CE zu der HL; folglich verhält ſich (5, 11. S.) das Dreyeck EBC zum Dreyecke LGH wie das Dreyeck ECD zum Dreyecke LHK. Es iſt aber gezeigt worden, daſs auch das Dreyeck EBC zum Dreyecke LGH ſich verhalte, wie das Dreyeck ABE zum Dreyecke FGL; folglich verhält ſich auch das Dreyeck ABE zum Dreyeck FGL wie das Dreyeck BEC zum Dreyecke GLH, und das Dreyeck ECD zum Dreyecke LHK; folglich verhält ſich auch (5, 12. S.) eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder wie alle Vorderglieder zuſammen zu allen Hintergliedern zuſammen, und ſo weiter wie im vorigen Beweis, w. z. e. w.

21. *Saz.*

21. *Saz.*

Lehrsaz. Geradlinige Figuren, die einer und derselben ähnlich sind, sind auch einander selbst ähnlich.

Es seyen die beyden geradlinigen Figuren A, B der C ähnlich, so behaupte ich, dass auch die A der B ähnlich sey.



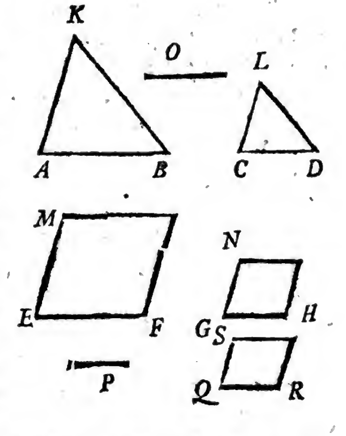
Beweis. Da die geradlinige Figur A der C ähnlich ist, so ist sie (6, 1. Erkl.) ihr auch gleichwinkelig, auch sind in derselben die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt. Ferner, da die geradlinige Figur B der C ähnlich ist, so ist sie ihr auch gleichwinkelig, und es sind in derselben die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt; beyde geradlinige Figuren A, B also sind der C gleichwinkelig, und in beyden sind die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt; folglich ist auch die geradlinige Figur A der B gleichwinkelig, und die um die gleichen Winkel liegenden Seiten sind (5, 11. S.) in beyden proportionirt, und mithin ist (6, 1. Erkl.) die A der B ähnlich w. z. e. w.

22. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn vier gerade Linien proportionirt sind, so sind die auf ihnen beschriebenen ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigen Figuren auch proportionirt; und wenn die über vier geraden Linien beschriebenen ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigen Figuren proportionirt sind, so sind auch die geraden Linien proportionirt.

Es ſeyen die vier geraden Linien AB, CD, EF, GH, proportionirt, ſo daſs die AB zu der CD ſich verhalte wie die EF zu der GH, und man beſchreibe über den Linien AB, CD die ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigen Figuren KAB, LCD, über den Liuien EF, GH aber die ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigen Figuren MF, NH, ſo behaupte ich, daſs die geradlinige Figur KAB zu der LCD ſich verhalte wie die MF zu der NH.

Beweis. Man nehme (6, 11. S.) zu den beyden AB, CD die dritte Proportionallininie O, zu den beyden EF, GH aber die dritte Proportionallinie P.



Da nun die AB zu der CD ſich verhält wie die EF zu der GH, die CD aber zu der O wie die GH zu der P, ſo verhält ſich (5, 22. S.) auch *gleichförmig* die AB zu der O wie die EF zu der P. Aber verhält (6. 20. Zuſ. 2.) ſich die AB zu der O wie die geradlinige Figur KAB zu der LCD, und die EF zu der P wie die geradlinige Figur MF zu der NH; folglich (5, 11. S.) die KAB zu der LCD wie die MF zu der NH.

Es verhalte ſich aber nun die geradlinige Figur KAB zu der LCD wie die MF zu der NH, ſo behaupte ich, daſs auch die AB zu der CD ſich verhalte wie die EF zu der GH. Man mache (6, 12. S.) die AB zu der CD wie die EF zu der QR und beſchreibe (6, 18. S.) über der QR eine der MF oder NH ähnliche und ähnlich liegende geradlinige Figur SR.

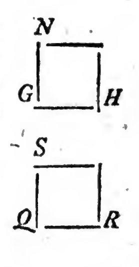
Da nun die AB zu der CD ſich verhält wie die EF zu der QR, und über den beyden AB, CD die ähnlich lie-

liegenden geradlinigen Figuren KAB, LCD, über den beyden EF, QR aber die ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigen Figuren MF, SR beschrieben sind, so verhält sich, nach dem ersten Theile des Beweises, die KAB zu der LCD wie die MF zu der SR. Es ist aber angenommen, dass die geradlinige Figur KAB zu der LCD sich verhalte wie die MF zu der NH. Die geradlinige Figur MF also hat (5, 11. S.) zu den beyden NH, SR einerley Verhältniss; folglich ist (5, 9. S.) die geradlinige Figur NH der SR gleich. Sie ist ihr aber auch ähnlich und ähnlich liegend; folglich ist, nach dem folgenden Lehnsaze, die GH der QR gleich. Da nun die AB zu der CD sich verhält, wie die EF zu der QR, die QR aber der GH gleich ist, so verhält sich (5, 7. S.) die AB zu der CD wie die EF zu der GH.

Wenn demnach vier gerade Linien proportionirt sind u. s. w. w. z. e. w.

Lehnsaz. Dass aber, wenn geradlinige Figuren gleich und ähnlich sind, ihre homologen Seiten einander gleich seyen, kann auf folgende Art gezeigt werden.

Es seyen die geradlinigen Figuren NH, SR gleich und ähnlich, und es verhalte sich die HG zu der GN wie die RQ zu der QS, so behaupte ich, dass die RQ der HG gleich sey.



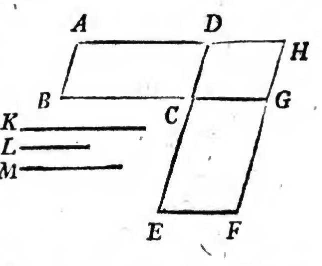
Beweis. Denn wären sie ungleich, so müsste die eine von ihnen grösser, als die andere, seyn. Es sey die RQ grösser, als die HG. Da nun die RQ zu der QS sich verhält wie die HG zu der GN, so verhält sich (5, 16. S.) auch *verwechselt* die RQ zu der HG wie die QS zu der GN. Es ist aber die QR grösser, als die HG, folglich auch die QS grösser, als die GN, und mithin ist (6, 20. S.) auch die geradlinige Figur RS grösser, als die HN. Sie ist aber auch gleich, welches unmög-

möglich ist. Demnach ist die QR der GH nicht ungleich, alſo gleich, w. z. e. w.

23. *Saz.*

Lehrſaz. Gleichwinkelige Parallelogramme haben zu einander ein Verhältniſs, das aus den Verhältniſſen ihrer Seiten zuſammengeſezt iſt.

Es ſeyen die gleichwinkeligen Parallelogramme AC, CF, in welchen der Winkel BCD dem Winkel ECG gleich ſey, ſo behaupte ich, daſs das Parallelogramm AC zu dem Parallelogramme CF ein Verhältniſs habe, das aus den Verhältniſſen der Seiten zuſammengeſezt ſey, das heiſst, aus dem Verhältniſſe der BC zu der CG und aus dem Verhältniſſe der DC zu der CE.



Beweis. Man bringe die BC mit der CG in *eine* gerade Linie, ſo iſt (1, 14. S.) auch die DC mit der CE in *einer* geraden Linie. Man vollende hierauf das Parallelogramm DG, nehme eine gerade Linie K an, und mache (6, 12. S.) die BC zu der CG wie die K zu der L, und die DC zu der CE wie die L zu der M.

Die Verhältniſſe der K zu der L und der L zu der M ſind alſo einerley mit den Verhältniſſen der Seiten, nämlich der BC zu der CG, und der DC zu der CE. Aber (6, 5. Erkl.) iſt das Verhältniſs der K zu der M aus dem Verhältniſſe der K zu der L und der L zu der M zuſammengeſezt; folglich hat auch die K zu der M ein Verhältniſs, das aus den Verhältniſſen der Seiten zuſammengeſezt iſt. Und da (6, 1. S.) die BC zu der CG ſich verhält wie das Parallelogramm AC zu dem Parallelogramme CH, aber auch die BC zu der CG wie die K zu

der

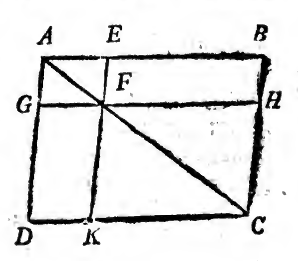
der L, so verhält sich (5, 11. S.) auch die K zu der L wie das Parallelogramm AC zu dem Parallelogramme CH. Da ferner (6, 1. S.) die DC zu der CE sich verhält wie das Parallelogramm CH zu dem Parallelogramme CF, aber auch die DC zu der CE wie die L zu der M, so verhält sich (5, 11. S.) auch die L zu der M wie das Parallelogramm CH zu dem Parallelogramme CF. Da nun gezeigt worden ist, daſs die K zu der L sich verhalte wie das Parallelogramm AC zu dem Parallelogramme CH, und die L zu der M wie das Parallelogramm CH zu dem Parallelogramme CF, so verhält sich (5, 22. S.) auch *gleichförmig* die K zu der M wie das Parallelogramm AC zu dem Parallelogramme CF. Die K aber hat zu der M ein Verhältniſs, das aus den Verhältnissen der Seiten zusammengesezt ist; folglich hat auch das Parallelogramm AC zu dem Parallelogramme CF ein Verhältniſs, das aus den Verhältnissen der Seiten zusammengesezt ist.

Demnach haben gleichwinkelige Parallelogramme u. s. w. w. z. e. w.

24. *Saz.*

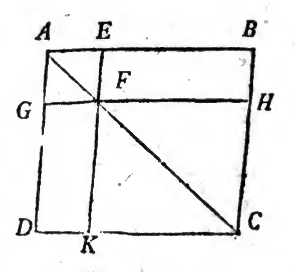
Lehrsaz. In jedem Parallelogramme sind die um die Diagonale herumliegenden Parallelogramme sowohl dem ganzen als auch einander selbst ähnlich.

Es sey das Parallelogramm ABCD, dessen Diagonale AC, um die Diagonale AC aber liegen die Parallelogramme EG, HK, so behaupte ich, daſs die Parallelogramme EG, HK so wohl dem ganzen ABCD, als auch einander selbst, ähnlich seyen.



Beweis. Da mit der Seite BC des Dreyecks ABC die EF

par-



parallel gezogen ist, so verhält sich (6, 2. S.) die BE zu der EA wie die GF zu der FA. Da ferner mit der Seite C*D* des Dreyecks AC*D* die FG parallel gezogen ist, so verhält sich die CF zu der FA wie die *D*G zu der GA. Es ist aber gezeigt worden, daſs die CF zu der FA sich verhalte wie die BE zu der EA; folglich verhält sich (5, 11. S.) auch die BE zu der EA wie die *D*G zu der GA, und (5, 18. S.) *verbunden* die BA zu der AE wie die *D*A zu der AG, und (5, 16 S.) *verwechselt*, die BA zu der A*D* wie die AE zu der AG. Demnach sind in den Parallelogrammen ABC*D*, EG die um den gemeinschaftlichen Winkel BA*D* liegenden Seiten proportionirt. Und weil die GF der *D*C parallel ist, so ist (1, 29. S.) der Winkel AGF dem Winkel A*D*C, der Winhel GFA aber dem Winkel *D*CA gleich, und der Winkel *D*AC ist beyden Dreyecken A*D*C, AGF gemeinschaftlich; folglich ist das Dreyeck A*D*C dem Dreyecke AGF gleichwinkelig. Aus eben den Gründen ist auch das Dreyeck ABC dem Dreyecke AEF gleichwinkelig; folglich ist das ganze Parallelogramm ABC*D* dem Parallelogramme EG gleichwinkelig, demnach verhält sich (6, 4. S.) die A*D* zu der *D*C wie die AG zu der GF, die DC zu der CA wie die GF zu der FA, die AC zu der CB wie die AF zu der FE, und die CB zu der BA wie die FE zu der EA. Da nun gezeigt worden ist, daſs die *D*C zu der CA sich verhalte wie die GF zu der FA, und die AC zu der CB wie die AF zn der FE, so verhält sich auch *gleichförmig*, (5, 22. S.) die *D*C zu der CB wie die GF zu der FE; demnach sind in den Parallelogrammen ABCD, EG die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt, und daher (6, 1. Erkl.) das Parallelogramm ABCD dem Parallelogramme EG ähnlich. Aus eben den Gründen ist das Parallelogramm ABCD auch dem Parallelogramme HK ähnlich; die beyden Parallelogramme EG, HK

also

also sind dem Parallelogramme ABCD ähnlich. Geradlinige Figuren aber, die einer und derselben ähnlich sind, sind (6, 21. S.) auch einander selbst ähnlich; folglich ist das Parallelogramm EG dem Parallelogramme HK ähnlich.

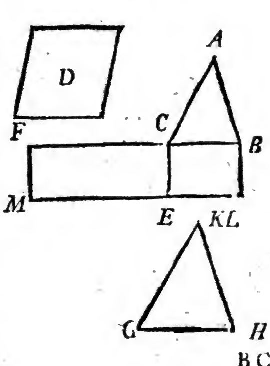
Demnach sind in jedem Parallelogramme u. s. w. w. z. e. w.

25. *Saz.*

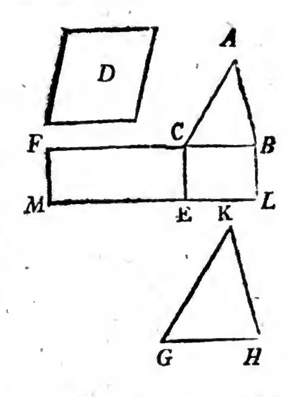
Aufgabe. Eine geradlinige Figur zu machen, die einer gegebenen ähnlich, und einer andern gegebenen gleich sey.

Es sey die gegebene geradlinige Figur, welcher man eine andere ähnlich machen soll, die ABC, und die, welcher man eine andere gleich machen soll, die D, und man soll eine geradlinige Figur der ABC ähnlich und der D gleich machen.

Auflösung. Man seze (1, 44. u. 45. S.) auf die Linie BC das Parallelogramm BE das dem Dreyecke ABC gleich sey, auf die Linie CE aber das Parallelogramm CM, das der Figur D gleich sey, unter dem Winkel FCE, der dem Winkel CBL gleich sey, so ist (1, 14. S.) die BC mit der CF und die LE mit der EM in *einer* geraden Linie. Man nehme nun (6, 13. S.) zu den beyden BC, CF die mittlere Proportionallinie GH, und beschreibe (6, 18. S.) über der GH die geradlinige Figur KGH, die der ABC ähnlich sey, und ähnlich liege.



Beweis. Da die BC zu der GH sich verhält wie die GH zu der CF, aber wenn drey gerade Linien proportionirt sind (6, 20. Zus. 2.) die erste zur dritten sich verhält wie die geradlinige Figur über der ersten zu der ihr ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigen Figur über der zweyten, so verhält sich die



BC zu der CF wie das Dreyeck ABC zum Dreyecke KGH. Aber (6, 1. S.) verhält sich die BC zu der CF wie das Parallelogramm BE zu dem Parallelogramme EF; folglich verhält sich das Dreyeck ABC zum Dreyecke KGH wie das Parallelogramm BE zum Parallelogramme EF. Es ist aber das Dreyeck ABC dem Parallelogramme BE gleich; folglich ist auch das Dreyeck KGH dem Parallelogramme EF gleich. Das Parallelogramm EF aber ist der geradlinigen Figur D gleich; folglich ist auch das Dreyeck KGH der geradlinigen Figur D gleich. Es ist aber das Dreyeck KGH dem Dreyecke ABC ähnlich.

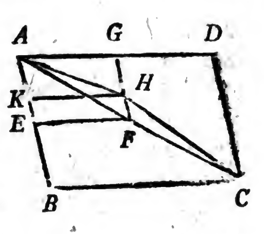
Demnach ist die geradlinige Figur KGH der gegebenen ABC ähnlich und einer andern gegebenen gleich gemacht worden, w. z. v. w.

26. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn man von einem Parallelogramme ein Parallelogramm wegnimmt, das dem ganzen ähnlich ist und ähnlich liegt, und mit ihm einen gemeinschaftlichen Winkel hat, so liegt es mit dem ganzen um einerley Diagonale.

Von dem Parallelogramme ABCD werde das Parallelogramm AEFG weggenommen, das dem ABCD ähnlich sey und ähnlich liege, und mit ihm den Winkel DAB gemein habe, so behaupte ich, daſs das Parallelogramm ABCD mit dem Parallelogramme AEFG um einerley Diagonale liege.

Be-



Beweis. Geſezt dies wäre nicht, ſondern es wäre die Möglichkeit angenommen, die Diagonale beyder die AHC, ſo ziehe man durch den Punkt H mit der AD oder BC die HK parallel. Da nun das Parallelogramm ABCD mit dem Parallelogramme KG um einerley Diagonale liegt, ſo iſt (6, 24. S.) das Parallelogramm ABCD dem Parallelogramme KG ähnlich; folglich verhält ſich (6, 1. Erkl.) die *D*A zu der AB wie die GA zu der AK. Aber wegen der Aehnlichkeit der Parallelogramme ABCD, EG verhält ſich die DA zu der AB wie die GA zu der AE; folglich auch (5, 11. S.) die GA zu der AE wie die GA zu der AK. Die GA hat alſo zu den beyden AK, AE einerley Verhältniſs; folglich iſt (5, 9. S.) die AE der AK, das heiſst, die kleinere der gröſſern, gleich, welches unmöglich iſt; folglich liegt nicht das Parallelogramm ABC*D* mit dem Parallelogramme KG, ſondern das Parallelogramm ABC*D* mit dem AGFE um einerley Diagonale.

Wenn demnach von einem Parallelogramme u. ſ. w. w. z. e. w.

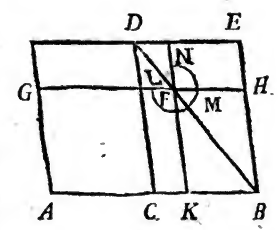
27. *Saz.*

Lehrſaz. Unter allen Parallelogrammen die auf einerley geraden Linie errichtet werden, und Parallelogramme zu Ergänzungen haben, die dem Parallelogramme auf der Hälfte der Linie ähnlich ſind und ähnlich liegen, iſt das auf der Hälfte der Linie errichtete, was ſeiner Ergänzung ähnlich iſt, das gröſste.

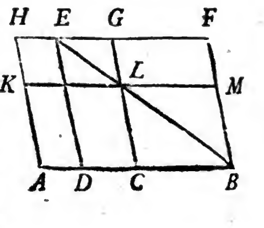
Es ſey die gerade Linie AB, man halbire ſie in dem Punkte C, und errichte über der AB das Parallelogramm

AD,

AD, welches das Parallelngramm CE zur Ergänzung habe, das dem auf der Hälfte der Linie AB, das heifst auf der BC, befchriebenen ähnlich fey und ähnlich liege, fo behaupte ich, dafs unter allen Parallelogrammen, die auf der Linie AB errichtet werden, und Parallelogramme, die dem CE ähnlich find und ähnlich liegen, zu Ergänzungen haben, das Parallelogramm AD das gröfste fey. Denn man errichte auf der Linie AB das Parallelogramm AF, welches das Parallelogramm KH, das dem CE ähnlich ift, und ähnlich liegt, zur Ergänzung habe, fo behaupte ich, dafs das Parallelogramm AD gröffer fey, als das Parallelogramm AF.



Beweis. Da das Parallelogramm CE dem Parallelogramme KH ähnlich ift, fo liegen fie (6, 26. S.) um einerley Diagonale, man ziehe ihre Diagonale DB, und vollende die Figur. Da nun (1, 43. S.) das Parallelogramm CF dem Parallelogramme FE gleich ift, fo feze man zu beyden das Parallelogramm KH, fo ift das ganze CH dem ganzen KE gleich. Aber (1, 36. S.) ift das Parallelogramm CH dem Parallelogramme CG gleich, weil die Linie AC der CB gleich ift; folglich ift auch das Parallelogramm CG dem Parallelogramme EK gleich. Man feze zu beyden das gemeinfchaftliche CF, fo ift das ganze AF dem Gnomon LMN gleich; folglich ift das Parallelogramm CE, das ift (1, 36. S.) das Parallelogramm AD gröffer, als das Parallelogramm AF.



Es fey nun wiederum die AB in dem Punkte C halbirt, und auf derfelben das Parallelogramm AL errichtet, welches das CM zur Ergänzung habe, und man errichte ferner auf der Linie AB das Parallelogramm AE, welches das DF zur Ergänzung habe, was

dem

dem auf der Hälfte von AB errichteten, nämlich dem CM, ähnlich ist und ähnlich liegt, so behaupte ich, daſs das Parallelogramm AL, das auf der Hälfte errichtet ist, gröſser sey, als das Parallelogramm AE.

Denn da das Parallelogramm *D* F dem CM ähnlich ist, so liegen sie (6, 26. S.) um einerley Diagonale. Es sey ihre Diagonale EB, und man vollende die Figur. Da nun (1, 36. S.) das Parallelogramm LF dem LH gleich ist, denn die FG ist der GH gleich, so ist das Parallelogramm LF gröſſer, als das EK. Es ist aber (1, 43. S.) das Parallelogramm LF dem *D*L gleich; folglich ist auch das Parallelogramm *D*L gröſſer, als das EK. Man seze zu beyden das Parallelogramm KD, so ist das ganze AL gröſſer, als das ganze AE.

Demnach ist unter allen Parallelogrammen u. s. w. w. z. e. w.

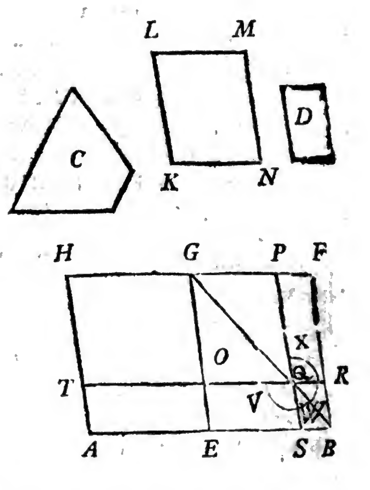
28. *Saz.*

Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie ein Parallelogramm zu beschreiben, das einer gegebenen geradlinigen Figur gleich sey, und zur Ergänzung ein Parallelogramm habe, das einer andern gegebenen Figur ähnlich sey, unter der Bedingung, daſs die gegebene geradlinige Figur, welcher die andere gleich gemacht werden soll, nicht gröſser sey, als das Parallelogramm auf der Hälfte der Linie, und daſs die Ergänzung des Parallelogramms auf der Hälfte der Linie und das Parallelogramm, dem die Ergänzung des ersten ähnlich seyn soll, einander ähnlich seyen.

Es sey die gegebenen gerade Linie AB, die gegebene geradlinige Figur, welcher man eine andere auf der Linie AB gleich machen soll, sey C, und diese sey nicht gröſſer, als

als das Parallelogramm auf der Hälfte der Linie, auch seyen die Ergänzungen einander ähnlich, die Figur aber, welcher die Ergänzung ähnlich seyn soll, sey D, und man soll auf der gegebenen geraden Linie AB ein der gegebenen geradlinigen Figur C gleiches Parallelogramm beschreiben, welches ein der Figur D ähnliches Parallelogramm zur Ergänzung habe.

Auflösung u. *Beweis.* Man halbire (1, 10. S.) die AB in dem Punkte E, beschreibe (6, 18. S.) eine der D ähnliche und ähnlich liegende Figur EBFG, und ergänze das Parallelogramm AG, so ist das Parallelogramm AG, vermöge der Bedingung, der Figur C entweder gleich, oder grösser, als sie. Wenn nun das Parallelogramm AG der Figur C gleich ist, so ist das verlangte geschehen, denn es ist



auf der geraden Linie AB ein Parallelogramm AG errichtet worden, das der gegebenen geradlinigen Figur C gleich ist, und ein Parallelogramme EF, das der Figur D ähnlich ist, zur Ergänzung hat. Ist aber das Parallelogramm AG der Figur C nicht gleich, so ist es grösser, als die Figur C. Es ist aber das Parallelogramm AG dem Parallelogramme EF gleich; folglich ist auch das Parallelogramm EF grösser, als die Figur C. Dem Ueberschusse aber um welchen das Parallelogramm EF die Figur C übertrifft, mache man das Parallelogramm KLMN gleich, und zugleich der Figur D ähnlich und ähnlich liegend (6, 25. S.). Aber die Figur D ist dem Parallelogramme EF ähnlich; folglich ist auch das Parallelogramm KM dem Parallelogramme EF ähnlich. Es sey die gerade Linie LK der GE, und die Linie LM der

GF

GF homolog. Da nun das Parallelogramm EF den Figuren C, KM gleich ist, so ist EF grösser, als KM; folglich ist (6, 20. Zus.) die Linie GE grösser, als die KL, und die GF grösser, als die LM. Man mache (1, 3. S.) die GO der LK und die GP der LM gleich, und ergänze (1, 31. S.) das Parallelogramm OGPQ, so ist (6, 24. S.) das Parallelogramm OP dem Parallelogramme KM gleich und ähnlich. Das Parallelogramm KM aber ist dem EF ähnlich; folglich ist auch (6, 21. S.) das Parallelogramm OP dem EF ähnlich, und mithin liegt (6, 26. S.) das Parallelogramm OP mit dem EF um einerley Diagonale. Es sey ihre Diagonale GQB, und man vollende die Figur. Da nun das Parallelogramm EF den Figuren C, KM, das Parallelogramm KM aber dem PO gleich ist, so ist auch der Rest, der Gnomon VWX dem Reste, der Figur C, gleich. Da nun (1, 43. S.) das Parallelogramm PR dem OS gleich ist, so seze man zu beyden das gemeinschaftliche RS hinzu, und es ist das ganze PB dem ganzen OB gleich. Das Parallelogramm OB aber ist (1, 36. S.) dem Parallelogramme TE gleich, weil auch die Seite AE der Seite EB gleich ist; folglich ist auch das Parallelogramm TE dem Parallelogramme PB gleich. Man seze zu beyden das gemeinschaftliche OS, so ist das ganze TS dem ganzen Gnomon VWX gleich. Von dem Gnomon VWX aber ist gezeigt worden, dass er der Figur C gleich sey; folglich ist auch das Parallelogramm TS der Figur C gleich.

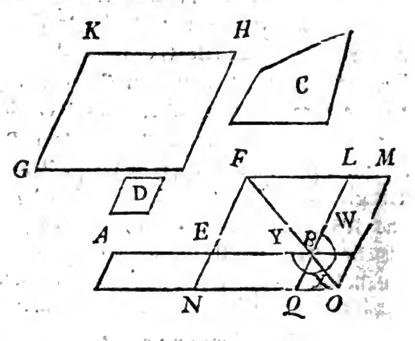
Demnach ist auf der gegebenen geraden Linie AB ein der gegebenen geradlinigen Figur C gleiches Parallelogramm TS errichtet worden, welches das der Figur D ähnliche Parallelogramm RS zur Ergänzung hat, w. z. v. w.

29. *Saz.*

Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie ein Parallelogramm zu beschreiben, das einer gegebenen geradlinigen Figur gleich sey, und ein Parallelogramm zum Ueberschusse habe,

habe, das einer andern gegebenen geradlinigen Figur ähnlich sey.

Es sey die gegebene gerade Linie AB, die gegebene geradlinige Figur, welcher eine andere auf der Linie AB gleich werden soll, sey C, diejenige aber, welcher der Ueberschuss ähnlich seyn soll, sey D, und man soll auf der Linie AB ein der geradlinigen Figur C gleiches Parallelogramm errichten, das ein der Figur D ähnliches Parallelogramm zum Ueberschusse habe.



Auflösung. Man halbire (1, 9. S.) die Linie AB in dem Punkte E, und beschreibe (6, 18. S.) auf der Linie EB ein der Figur D ähnliches und ähnlich liegendes Parallelogramm EL, und (6, 25. S.) das Parallelogramm GH, das den beyden EL, C gleich, und der Figur D ähnlich sey und ähnlich liege, so ist das Parallelogramm GH dem EL ähnlich. Nun sey KH die der Seite FL, KG aber die der Seite FE homologe Seite. Da nun das Parallelogramm GH grösser ist, als das Parallelogramm EL, so ist auch die gerade Linie KH grösser, als die FL, und die KG grösser, als die FE. Man verlängere die FL, FE, mache (1, 3. S.) der KH die FLM, der KG die FEN gleich, und vollende das Parallelogramm MN, so ist MN dem GH gleich und ähnlich. Aber das Parallelogramm GA ist dem EL ähnlich, folglich ist auch das Parallelogramm MN (6, 21. S.) dem EL ähnlich, und mithin liegen sie (6, 26. S.) um einerley Diagonale. Man ziehe ihre Diagonale FO, und vollende die Figur.

Beweis. Da das Parallelogramm GH den Figuren EL, C, aber auch dem Parallelogramme MN gleich ist, so ist auch

auch MN den Figuren FL, C gleich. Man nehme das gemeinschaftliche EL weg, so ist der Rest, der Gnomon WXY der Figur C gleich. Und da die Linie EA der EB gleich ist, so ist (1, 36. S.) auch das Parallelogramm AN dem Parallelogramme NB, das heisst (1, 43. S.) dem LP, gleich. Man seze das gemeinschaftliche EO hinzu, so ist das ganze AO dem Gnomon WXY gleich. Aber der Gnomon WXY ist der Figur C gleich; folglich ist auch das Parallelogramm AO der Figur C gleich.

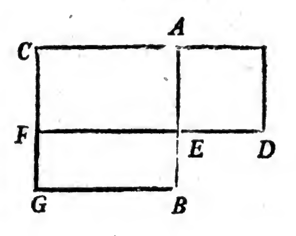
Demnach ist auf der gegebenen geraden Linie AB ein der gegebenen geradlinigen Figur C gleiches Parallelogramm AO errichtet worden, welches zum Ueberschusse das der Figur D ähnliche Parallelogramm PQ hat, w. z. v. w.

30. *Saz.*

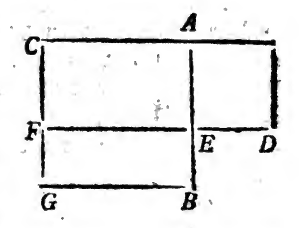
Aufgabe. Eine gegebene begränzte gerade Linie nach äusserem und mittlerem Verhältnisse zu theilen.

Es sey die gegebene begränzte gerade Linie AB, und man soll diese nach äusserem und mittlerem Verhältnisse theilen.

Auflösung. Man mache (1, 46. S.) von der AB das Quadrat BC, und beschreibe (6, 29. S.) auf der AC das dem Quadrate BC gleiche Parallelogramm CD, das die der BC ähnliche Figur AD zum Ueberschusse habe.



Beweis. Da BC ein Quadrat ist, so ist auch AD ein Quadrat. Da BC dem Parallelogramme CD gleich ist, so nehme man das gemeinschaftliche CE weg, und es ist auch der Rest BF dem Reste AD gleich. Er ist ihm aber auch gleichwinkelig, folglich sind (6, 14. S.) die um die gleichen Winkel liegenden Seiten der Figuren BF, AD um-



gekehrt proportionirt, und es verhält ſich mithin die FE zu der ED wie die AE zu der EB. Es iſt aber auch (1, 34. S.) die FE der AC, das iſt, der AB, und die ED der AE gleich; folglich verhält ſich die AB zu der AE wie die AE zu der EB. Aber die AB iſt gröſſer, als die AE; folglich iſt auch die AE gröſſer, als die EB.

Demnach iſt die gerade Linie AB in dem Punkte E nach äuſſerem und mittlerem Verhältniſſe getheilt, und ihr gröſſerer Abſchnitt iſt AE, w. z. v. w.

Anderes Verfahren.

Es ſey die gerade Linie AB gegeben; und man ſoll ſie nach äuſſerem und mittlerem Verhältniſſe theilen.

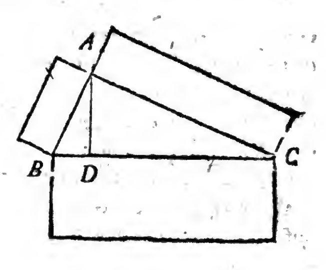
Auflöſung. Man ſchneide (2, 11. S.) die AB in dem Punkte C ſo, daſs das Rechteck aus den Linien AB, BC dem Quadrate der Linie AC gleich ſey.

Beweis. Da nun das Rechteck aus den Linien AB, BC dem Quadrate der Linie AC gleich iſt, ſo verhält ſich (6, 17. S.) die AB zu der AC wie die AC zu der CB; folglich iſt (6, 3. Erkl.) die AB nach äuſſerem und mittlerem Verhältniſſe getheilt, w. z. v. w.

31. *Saz.*

Lehrſaz. In rechtwinkeligen Dreyecken iſt die Figur auf der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den ihr ähnlichen, und ähnlich liegenden Figuren auf den einſchlieſſenden Seiten gleich.

Es sey das rechtwinkelige Dreyeck A B C, dessen rechter Winkel B A C, so behaupte ich, dass die Figur auf der B C den ihr ähnlichen und ähnlichliegenden Figuren auf den Seiten B A, A C gleich sey.



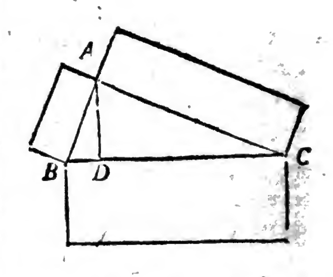
Beweis. Man fälle das Loth A D. Da nun in dem Dreyecke A B C von dem rechten Winkel A nach der Grundlinie BC das Loth A D gefällt worden ist; so sind (6, 8. S) die an dem Lothe liegenden Dreyecke ABD, A D C, sowohl dem ganzen als auch einander selbst ähnlich. Und da das Dreyeck A B C dem Dreyecke A B D ähnlich ist, so verhält sich die C B zu der B A wie die A B zu der B D. Da nun hier drey gerade Linien proportionirt sind, so verhält sich (6, 20. Zus. 2.) die erste zur dritten wie die Figur auf der ersten zu der ihr ähnlichen und ähnlichliegenden Figur auf der zweyten. Demnach verhält sich die C B zu der B D wie die Figur auf der C B zu der ihr ähnlichen und ähnlichliegenden Figur auf der B A. Aus eben den Gründen verhält sich auch die C B zu der C D wie die Figur auf der B C zu der Figur anf der C A; folglich verhält sich auch die B C zu den B D, D C wie die Figur auf der B C zu den ihr ähnlichen und ähnlichliegenden Figuren auf den B A, A C. Es ist aber die B C deu beyden B D, D C gleich, folglich ist die Figur auf der B C den ihr ähnlichen und ähnlichliegenden Figuren auf den beyden B A, A C gleich.

Demnach ist in rechtwinkeligen Dreyecken die Figur u. s. w. w. z. e. w.

Anderer Beweis.

Da (6, 23. S.) ähnliche Figuren in zweymal höherem Verhältnisse ihrer homologen Seiten stehen; so hat die Figur auf der B C zu der Figur auf der B A ein zweymal

höheres Verhältniſs, als die BC zu der BA. Aber (6, 20 Zuſ. 1.) hat auch das Quadrat von der BC zu dem Quadrate von der BA ein zweymal höheres Verhältniſs, als die BC zu der BA; folglich verhält ſich (5, 11. S.) die Figur auf der BC zu der Figur auf der BA wie das Quadrat der BC zu dem Quadrate der BA. Aus gleichen Gründen verhält ſich auch die Figur auf der BC zu der Figur auf der CA wie das Quadrat von der BC zu dem Quadrate von der CA, und mithin die Figur auf der BC zu den Figuren auf den BA, AC wie das Quadrat von der BC zu den Quadraten von den BA, AC. Aber (1, 47. S.) iſt das Quadrat von der BC den Quadraten von den BA, AC gleich; folglich iſt auch die Figur auf der BC den ihr ähnlichen und ähnlichliegenden Figuren auf den beyden BA, AC gleich w. z. e. w.

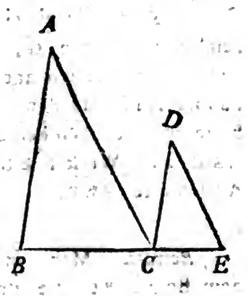


32. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn man zwey Dreyecke, in welchen zwey und zwey Seiten einander proportionirt ſind, mit einem Winkel ſo an einander bringt, daſs ihre homologen Seiten parallel ſind, ſo liegen die übrigen Seiten der Dreyecke in *einer* geraden Linie.

Es ſeyen zwey Dreyecke ABC, DCE, in welchen die zwey Seiten BA, AC den zwey Seiten CD, DE proportionirt ſeyen, ſo daſs die BA zu der AC ſich verhalte wie die CD zu der DE, es ſey aber die AB der DC, und die AC der DE parallel, ſo behaupte ich, daſs die BC mit der CE in *einer* geraden Linie liege.

Be-



Beweis. Da die AB der DC parallel ist, und beyde von der Linie AC geschnitten werden, so sind (1, 29. S.) die Wechselwinkel BAC, ACD einander gleich. Aus eben dem Grunde ist auch der Winkel CDE dem ACD gleich; folglich ist auch der Winkel BAC dem CDE gleich. Da nun ABC, DCE zwey Dreyecke sind, in welchen der Winkel bey A dem Winkel bey D gleich ist, und die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt sind, die BA nämlich zu der AC wie die CD zu der DE, so ist (6, 6. S.) das Dreyeck ABC dem Dreyecke DCE gleichwinkelig; folglich der Winkel ABC dem dem Winkel DCE gleich. Es ist aber gezeigt worden, dass auch der Winkel ACD dem Winkel BAC gleich sey; folglich ist der ganze Winkel ACE den beyden ABC, BAC gleich. Man seze den gemeinschaftlichen ACB hinzu, so sind die Winkel ACE, ACB den Winkeln ABC, BAC, ACB gleich. Aber (1, 32. S.) sind die Winkel BAC, ACB, ABC zwey rechten gleich; folglich sind auch die Winkel ACE, ACB zwey rechten gleich. Es machen also an dem Punkte C der Linie AC zwey gerade Linien BC, CE, die nicht nach einerley Seite zu liegen, die Nebenwinkel ACE, ACB zwey rechten gleich; folglich liegt (1, 14. S.) die BC mit der CE in *einer* geraden Linie.

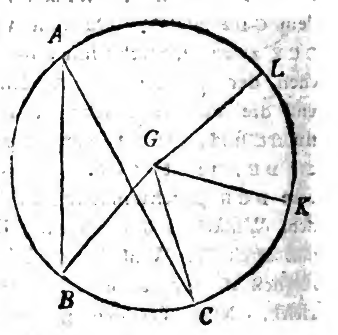
Wenn demnach zwey Dreyecke in welchen zwey und zwey Seiten u. s. w. w. z. e. w.

32. *Saz.*

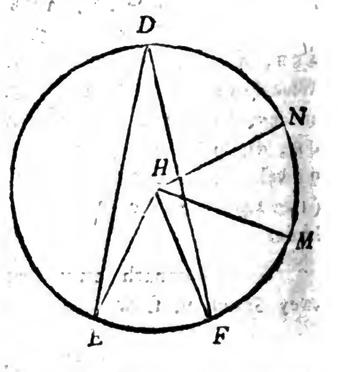
Lehrsaz. In gleichen Kreisen haben sowohl die Centralwinkel als die Peripheriewinkel einerley Verhältniss mit den Bogen, auf welchen sie stehen; auch die Ausschnitte verhalten sich wie ihre Bogen.

Es

Es seyen die gleichen Kreise ABC, DEF, und an deren Mittelpunkten G, H seyen die Winkel BGC, EHF, an den Peripherien aber die Winkel BAC, EDF, so behaupte ich, daſs der Bogen BC zum Bogen EF sich verhalte wie der Winkel BGC zum Winkel EHF, der Winkel BAC zum Winkel EDF, und der Ausschnitt GBC zum Ausschnitte HEF.



Beweis. Man mache dem Bogen BC die Bogen CK, KL nud so weiter, so viel man will, dem Bogen EF aber die Bogen FM, MN, und so weiter, so viel man will, gleich, und ziehe die GK, GL, HM, HN.

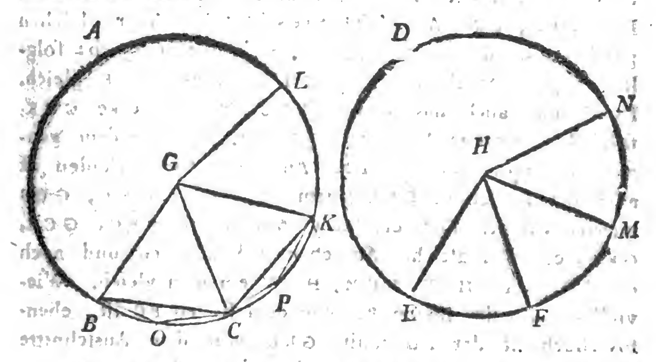


Da nun die Bogen BC, CK, KL einander gleich sind, so sind auch die Winkel BGC, CGK, KGL (3, 27. S.) einander gleich; wievielfach also der Bogen BL von dem Bogen BC ist, ebensovielfach ist der Winkel BGL von dem Winkel BGC. Aus eben dem Grunde ist auch der Bogen EN von dem Bogen EF ebensovielfach, als der Winkel EHN von dem Winkel EHF. Auch ist (3, 27. S.) der Winkel BGL ebensogroſs, oder gröſser, oder kleiner, als der Winkel EHN, je nachdem der BL ebensogroſs, oder gröſser, oder kleiner ist, als der Bogen EN. Da also hier vier Gröſsen sind, nämlich die zwey Bogen BC, EF, und die zwey Winkel BGC, EHF, und man von dem Bogen BC und dem Winkel BGC als Gleichvielfache den Bo-

Bogen BL und den Winkel BGL, von dem Bogen EF und dem Winkel EHF aber als Gleichvielfache den Bogen EN und den Winkel EHN genommen hat, und gezeigt worden ist, dass, je nachdem der Bogen BL grösser, ebensogross, oder kleiner ist, als der Bogen EN, auch der Winkel BGL grösser, ebensogross, oder kleiner sey, als der Winkel EHN, so verhält sich (5, 5. Erkl.) der Bogen BC zum Bogen EF wie der Winkel BGC zum Winkel EHF. Aber (5, 15. S.) verhält sich der Winkel BGC zum Winkel EHF wie der Winkel BAC zum Winkel EDF, denn jeder von beyden ist (3, 30. S.) das Doppelte des andern; folglich verhält sich auch der Bogen BC zum Bogen EF wie der Winkel BGC zum Winkel EHF, und der Winkel BAC zu dem Winkel EDF.

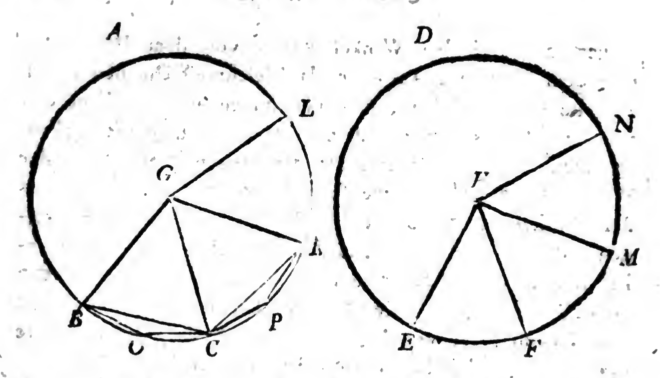
In gleichen Kreisen haben also sowohl die Centralwinkel als die Peripheriewinkel einerley Verhältniss mit den Bogen, auf welchen sie stehen, w. z. e. w.

Ich behaupte aber ferner, dass auch der Bogen BC zum Bogen EF sich verhalte wie der Ausschnitt GBC zum Ausschnitte HEF.



Man ziehe die BC, CK, nehme in den Bogen BC, CK die Punkte O, P an, und ziehe die BO, OC, CP, PK.

Da nun die beyden BG, GC den beyden CG, GK gleich sind, und gleiche Winkel einschliessen, so ist auch die



die Grundlinie BC der Grundlinie CK gleich, folglich ist (1, 4. S.) auch das Dreyeck GBC dem Dreyecke GCK gleich. Und da der Bogen BC dem Bogen CK gleich ist, so ist auch der übrige Bogen, der diesen zum Kreise ABC ergänzt, (3. Grundſ.) dem übrigen Bogen, der den nämlichen zu einerley Kreise ergänzt, gleich; folglich ist (3, 27. S.) der Winkel BOC dem Winkel CPK gleich, und daher (3, 11. Erkl.) der Abschnitt BOC dem Abschnitte CPK ähnlich, auch sind beyde über den gleichen geraden Linien BC, CK. Aehnliche Kreisabschnitte über gleichen geraden Linien aber sind (3, 24. S.) einander gleich; folglich ist der Abschnitt BOC dem Abschnitte CPK gleich. Es ist aber auch das Dreyeck BGC dem Dreyecke CGK, folglich der ganze Ausschnitt GBC (2. Grundſ.) dem ganzen Ausschnitte GCK gleich. Aus eben den Gründen ist auch der Ausschnitt GKL jedem der beyden GKC, GCB gleich; folglich sind die drey Ausschnitte GBC, GCK, GKL, einander gleich. Aus eben den Gründen sind auch die Ausschnitte HEF, HEM, HMN einander gleich. Wievielfach also der Bogen BL von dem Bogen BC ist, ebensovielfach ist der Ausschnitt GBL von dem Ausschnitte GBC. Aus gleichen Gründen ist auch der Bogen EN von dem Bogen EF ebensovielfach, als der Ausschnitt HEN von dem Ausschnitte HEF, auch ist, nach dem Erwiesenen, jenachdem der Bogen BL ebensogroſs, oder gröſser, oder kleiner ist, als der Bogen EN, auch der Ausschnitt

GBL

GBL ebensogrofs, oder gröffer, oder kleiner, als der Ausschnitt HEN. Da nun hier vier Gröffen, nämlich die zwey Bogen BC, EF, und die zwey Ausschnitte BCG, HEF sind, und man von dem Bogen BC und dem Ausschnitte GBC als Gleichvielfache den Bogen BL und den Ausschnitt GBL, von dem Bogen EF und dem Ausschnitte HEF aber als Gleichvielfache den Bogen EN, und den Ausschnitt HEN genommen hat, und gezeigt worden ist, dafs, jenachdem der Bogen BL gröffer, ebensogrofs, oder kleiner ist, als der Bogen EN, auch der Ausschnitt GBL gröffer, ebensogrofs, oder kleiner sey, als der Ausschnitt HEN, so verhält sich (5, 5. Erkl.) der Bogen BC zum Bogen EF wie der Ausschnitt GBC zum Ausschnitte HEF.

Zusaz. Hieraus erhellet (5, 11. S.) dafs auch der Ausschnitt zum Ausschnitte sich verhalte wie der Winkel zum Winkel.

Euklids

EUKLIDS ELEMENTE.

EILFTES BUCH.

Erklärungen.

1. Ein *Körper* ist, was Länge, Breite und Dicke hat.

2. Die *Gränze* des Körpers ist eine *Fläche.*

3. Eine gerade Linie ist *auf einer Ebene lothrecht*, wenn sie mit allen in derselben Ebene liegenden und sie berührenden geraden Linien rechte Winkel macht.

4. Eine Ebene ist *auf einer andern lothrecht*, wenn alle gerade Linien, die in der einen Ebene auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt beyder Ebenen lothrecht errichtet werden, auch auf der andern Ebene lothrecht stehen.

5. Wenn von dem oberen Endpunkte einer geraden Linie, die auf einer Ebene aufgestellt ist, ein Loth auf die Ebene gefällt und von dem Punkte, da solches die Ebene trifft, nach dem andern in der Ebene lie-

liegenden Endpunkte der aufgeſtellten Linie eine Linie gezogen wird, ſo heiſst der ſpize Winkel, welcher von der gezogenen und der aufgeſtellten geraden Linie eingeſchloſſen wird, die *Neigung der Linie gegen die Ebene.*

6. Die *Neigung einer Ebene gegen eine andere* iſt der ſpize Winkel, der von den geraden Linien eingeſchloſſen wird, die in beyden Ebenen auf den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt im nämlichen Punkte deſſelben lothrecht errichtet werden.

7. Zwey Ebenen haben *gegen einander ähnliche Neigungen*, wenn die vorgenannten Neigungswinkel einander gleich ſind.

8. *Parallele Ebenen* ſind, die nicht zuſammentreffen.

9. *Aehnliche Körper* ſind, die von gleichvielen ähnlichen Ebenen eingeſchloſſen werden.

10. *Gleiche und ähnliche Körper* ſind, die von gleichvielen gleichen und ähnlichen Ebenen eingeſchloſſen werden.

11. Ein *körperlicher Winkel* iſt die Neigung von mehr, als zwey, geraden Linien die einander berühren, und nicht in *einer* Ebene liegen, gegen alle gerade Linien. Oder: ein *körperlicher Winkel* iſt, der von mehr, als zwey, ebenen Winkeln, die nicht in einerley Ebene liegen, und in *einem* Punkte aufgeſtellt ſind, eingeſchloſſen wird.

12. Eine *Pyramide* iſt ein von Ebenen eingeſchloſſener Körper, der zwiſchen einer Ebene und einem Punkte befindlich iſt.

13. Ein *Prisma* ist ein von Ebenen eingeschlossener Körper, von welchen zwey gegenüberliegende gleiche und ähnliche parallel, die übrigen aber Parallelogramme sind.

14. Eine *Kugel* ist die Figur, welche eingeschlossen wird, wenn ein Halbkreis um seinen unbewegten Durchmesser umgedrehet wird, bis er wieder in die Stelle zurückkommt, von welcher er angefangen hatte sich zu bewegen.

15. Die *Axe* der Kugel ist eben die unbewegte gerade Linie, um welche der Halbkreis sich drehet.

16. Der *Mittelpunkt* der Kugel ist der nämliche mit dem Mittelpunkte des Halbkreises.

17. Der *Durchmesser* der Kugel ist eine gerade Linie die durch den Mittelpunkt gehet, und auf beyden Seiten von der Oberfläche der Kugel begränzt wird.

18. Ein *Kegel* ist die Figur welche eingeschlossen wird, wenn ein rechtwinkeliges Dreyeck um eine der den rechten Winkel einschliessenden Seiten, welche unbewegt bleibt, umgedrehet wird, bis es in eben die Stelle, von welcher es angefangen hatte sich zu bewegen, zurückkommt. Ist nun die unbewegt bleibende Linie der andern Seite, die sich um den rechten Winkel drehet, gleich, so ist der Kegel ein *rechtwinkeliger*, ist sie aber kleiner, so ist er ein *stumpfwinkeliger*, und ist sie grösser, so ist er ein *spizwinkeliger*.

19. Die *Axe* des Kegels ist die unbewegt bleibende Linie, um welche das Dreyeck sich drehet.

20. Die

20. Die *Grundfläche* desselben ist der von der umgedrehten Linie beschriebene Kreis.

21. Ein *Cylinder* ist die Figur, welche eingeschlossen wird, wenn ein rechtwinkeliges Parallelogramm, indem die eine seiner Seiten um den rechten Winkel unbewegt bleibt, umgedrehet wird, bis es in die Stelle zurückkommt, von welcher es angefangen hatte sich zu bewegen.

22. Die *Axe* des Cylinders ist jene unbewegt bleibende Linie, um welche das Parallelogramm sich drehet.

23. Die *Grundflächen* sind die Kreise, die von den beyden gegenüberliegenden umgedrehten Seiten beschrieben werden.

24. *Aehnliche Kegel* und *Cylinder* sind, deren Axen und die Durchmesser der Grundflächen proportionirt sind.

25. Ein *Würfel* ist ein von sechs gleichen Quadraten eingeschlossener Körper.

26. Ein *Tetraedron* ist ein von vier gleichen und gleichseitigen Dreyecken eingeschlossener Körper.

27. Ein *Oktaedron* ist ein von acht gleichen und gleichseitigen Dreyecken eingeschlossener Körper.

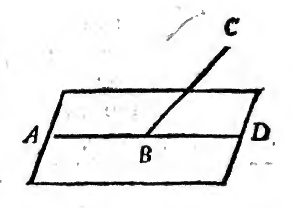
28. Ein *Dodekaedron* ist ein von zwölf gleichen, gleichseitigen und gleichwinkeligen Fünfecken eingeschlossener Körper.

29. Ein *Ikosaedron* ist ein von zwanzig gleichen und gleichseitigen Dreyecken eingeschlossene Körper.

1. *Saz.*

1. Saz.

Lehrſaz. Von einer geraden Linie liegt nicht ein Theil in einer Ebene, und der andere über der Ebene.



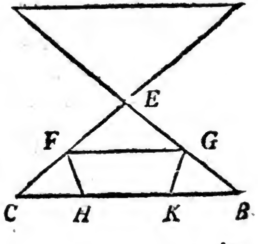
Beweis. Geſezt es ſey die Möglichkeit angenommen, von der geraden Linie ABC der Theil AB in der Ebene, der Theil BC aber über der Ebene, ſo liegt die geradlinige Verlängerung der Linie AB in der Ebene. Es ſey dieſe die BD, ſo hätten die zwey geraden Linien ABC, ABD einen gemeinſchaftlichen Abſchnitt AB welches unmöglich iſt. Denn eine gerade Linie hat mit einer andern nicht mehr, als *éinen*, Punkt gemein, und ſonſt fallen die geraden Linien ganz zuſammen.

Folglich liegt von einer geraden Linie nicht ein Theil in einer Ebene und der andere über der Ebene w. z. e. w.

2. Saz.

Lehrſaz. Wenn zwey gerade Linien einander ſchneiden, ſo liegen ſie in *einer* Ebene, auch jedes Dreyeck liegt in *einer* Ebene.

Die zwey geraden Linien AB, CD ſchneiden einander in dem Punkte E, ſo behaupte ich, daſs die beyden Linien AB, CD in *einer* Ebene liegen, wie auch, daſs jedes Dreyeck in *einer* Ebene liege.



Beweis. Man nehme in den Linien EB, EC nach Belieben die Punkte F, G an, und ziehe die Linien CB, FG, FH, GK, ſo be-

behaupte ich *erstens*, dass das Dreyeck EBC in *einer* Ebene liege.

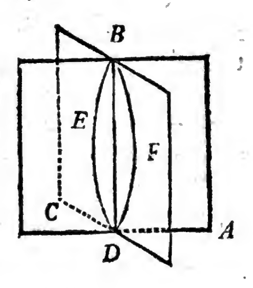
Denn wenn von dem Dreyecke EBC ein Theil, wie FHC oder GBK in der Ebene, der andere aber in einer andern Ebene läge, so läge auch von der einen der beyden Linien EC, EB ein Theil in der Ebene, nnd der andere in einer andern Ebene. Wenn von dem Dreyecke ECB ein Theil FCBG in der Ebene der andere aber in einer andern Ebene läge, so läge auch von den beyden Linien EC, EB ein Theil in der Ebene und der andere in einer andern Ebene. Davon ist aber die Ungereimtheit gezeigt worden; folglich liegt das Dreyeck ECB in *einer* Ebene. Aber in der Ebene, in welcher das Dreyeck BCE liegt, liegen auch die beyden Linien EC, EB, und in der Ebene, in welcher die beyden Linien EC, EB liegen, liegen (11, 1. S.) die beyden AB, CD; folglich liegen die beyden AB, CD in *einer* Ebene und jedes Dreyeck liegt in *einer* Ebene, w. z. e. w.

3. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey Ebenen einander schneiden, so ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt eine gerade Linie.

Die beyden Ebenen AB, BG schneiden einander und ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt sey DB, so behaupte ich, dass die DB eine gerade Linie sey.

Beweis. Denn wäre dies nicht, so ziehe man von dem Punkte D nach dem Punkte B in der Ebene AB die gerade Linie DEB, in der Ebene BC aber die gerade Linie DFB, so haben die beyden geraden Linien DEB, DFB einerley Endpunkte, und schliessen also einen Raum ein, welches (12. Grunds.) unmöglich ist. Folglich



lich ſind DEB, DFB keine gerade Linien. Auf eben die Art aber kann gezeigt werden, daſs auch keine andere Linie, die von dem Punkte D nach dem Punkte B gezogen wird, eine gerade ſey, auſſer der DB, dem gemeinſchaftlichen Durchſchnitte der Ebenen AB, BC.

Wenn demnach zwey Ebenen einander ſchneiden u. ſ. w. w. z. e. w.

4. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn eine gerade Linie auf zwey andern, die einander ſchneiden, in ihrem gemeinſchaftlichen Durchſchnitte, lothrecht iſt, ſo iſt ſie auf der Ebene durch jene beyde lothrecht.

Die gerade Linie EF ſtehe auf den beyden AB, CD, die einander in dem Punkte E ſchneiden, in dieſem Punkte E lothrecht, ſo behaupte ich, daſs die Linie EF auch auf der Ebene durch die beyden AB, CD lothrecht ſey.

Beweis. Man nehme die Linien AE, EB, CE, ED einander gleich, und ziehe durch den Punkt E die Linie GEH nach Belieben, ferner ziehe man die AD, CB, und endlich noch von einem beliebigen Punkte F, die Linien FA, FG, FD, FC, FH, FB.

Da nun die beyden AE, ED den beyden CE, EB gleich ſind, und (1, 15. S.) gleiche Winkel einſchlieſſen, ſo iſt (1, 4. S.) auch die Grundlinie AD der Grundlinie CB, und das ganze Dreyeck AED dem ganzen Dreyecke CEB, mithin auch der Winkel DAE dem Winkel EBC gleich. Es iſt aber (1, 15. S.) auch der Winkel AEG dem Winkel BEH gleich; folglich ſind in den Drey-

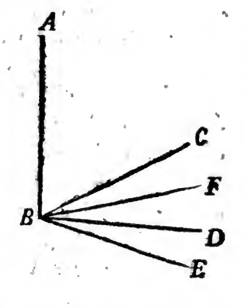
Dreyecken AGE, BEH zwey und zwey Winkel einander stückweise gleich, auch ist eine Seite des einen einer Seite des andern gleich, die AE nämlich der EB, welche an den gleichen Winkeln liegt; folglich sind (1, 26. S.) auch die übrigen Seiten beyder einander stückweise gleich; die CE also ist der EH, und die AG der BH gleich. Weil nun auch die AE der EB gleich, die FE aber gemeinschaftlich und lothrecht ist, so ist (1, 4. S.) die Grundlinie FA der Grundlinie FB gleich. Aus eben dem Grunde ist auch die FC der FD gleich. Da ferner die AD der CB, und die FA der FB gleich ist, so sind die beyden FA, AD den beyden FB, BC stückweise gleich, auch ist gezeigt worden, daß die Grundlinie FD der Grundlinie FC gleich sey; folglich ist der Winkel FAD dem Winkel FBC (1, 8. S.) gleich. Ferner ist gezeigt worden, daß die AG der BH gleich sey, und die FA ist der FB gleich; folglich sind die beyden FA, AG den beyden FB, BH gleich. Auch ist von dem Winkel FAG gezeigt worden, daß er dem Winkel FBH gleich sey; folglich ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie FG der Grundlinie FH gleich. Da nun ferner von der GE gezeigt worden ist, daß sie der EH gleich sey, die EF aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden GE, EF den beyden HE, EF gleich, auch ist die Grundlinie FH der Grundlinie FG gleich; folglich ist (1, 8. S.) auch der Winkel GEF dem Winkel HEF gleich, und mithin jeder von beyden ein rechter. Die Linie FE macht also mit der durch den Punkt E nach Belieben gezogenen Linie GH rechte Winkel. Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, daß die FE auch mit allen andern geraden Linien, die sie in derselben Ebene berühren, rechte Winkel mache. Eine gerade Linie aber ist (11, 3. Erkl.) auf einer Ebene lothrecht, wenn sie mit allen geraden Linien, die sie in derselben Ebene berühren, rechte Winkel macht; folglich ist die Linie EF auf der angenommenen Ebene lothrecht. Die angenommene Ebene aber ist die durch die Linien AB, CD; die EF also ist auf der Ebene durch die Linien AB, CD lothrecht.

Wenn demnach eine gerade Linie auf zwey andern u. f. w. w. z. e. w.

5. *Saz.*

Lehrfaz. Wenn eine gerade Linie auf drey andern, die fich berühren, in ihrem gemeinfchaftlichen Durchfchnitte lothrecht ift, fo find jene drey geraden Linien in *einer* Ebene.

Eine gerade Linie AB ftehe auf den drey geraden Linien BC, BD, BE in ihrem Berührungspunkte lothrecht, fo behaupte ich, dafs die drey Linien BC, BD, BE in *einer* Ebene liegen.



Beweis. Wäre dies nicht, fondern wären, die Möglichkeit angenommen, die Linien BD, BE in der Ebene, die BC aber über derfelben, fo lege man durch AB, BC eine Ebene, welche (11, 3. S.) die angenommene Ebene in einer geraden Linie fchneiden wird. Es fey diefe die BF, fo find alfo die drey geraden Linien AB, BC, BE in *einer* Ebene, nämlich in der Ebene durch die AB, BC. Und da die AB auf den beyden BD, BE lothrecht ift, fo ift fie (11, 4. S.) auch auf der Ebene durch die DB, BE lothrecht. Aber die Ebene durch die DB, BE ift die angenommene; folglich ift die AB auf der angenommenen Ebene lothrecht, und macht daher (11, 1. Erkl.) auch mit allen geraden Linien, die fie in derfelben Ebene berühren, rechte Winkel. Es berührt fie aber die BF, die in der angenommenen Ebene liegt; folglich ift der Winkel ABF ein rechter. Es ift aber nach der Vorausfezung, auch der Winkel ABC ein rechter, folglich ift der Winkel ABF dem Winkel ABC gleich, und beyde find in *einer* Ebene, welches (9. Grundf.) unmöglich ift; folg-

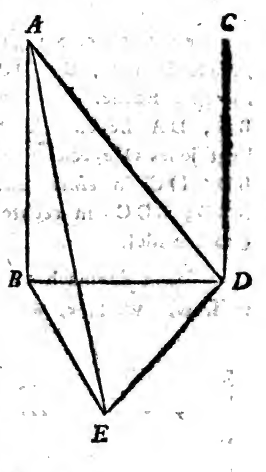
folglich liegt die gerade Linie BC nicht über der Ebene, und mithin sind die drey geraden Linien BC, BD, BE in *einer* Ebene.

Wenn demnach eine gerade Linie auf drey andern u. s. w. w. z. e. w.

6. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey gerade Linien auf einerley Ebene lothrecht sind, so sind sie parallel.

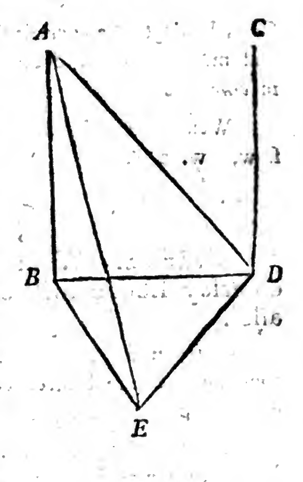
Es seyen die geraden Linien AB, CD auf der angenommenen Ebene lothrecht, so behaupte ich, dass die AB der CD parallel sey.



Beweis. Gesezt, sie begegnen der angenommenen Ebene in den Punkten B, D, so ziehe man die Linie BD, und errichte auf dieser in der Ebene das Loth DE, hierauf mache man die DE der AB gleich, und ziehe die BE, AE, AD.

Da die AB auf der angenommenen Ebene lothrecht ist, so ist sie (11, 3. Erkl.) auch auf allen geraden Linien, die sie in derselben Ebene berühren, lothrecht. Es berühren aber die beyden BD, BE, die in der angenommenen Ebene sind, die AB; folglich ist jeder der Winkel ABD, ABE ein rechter. Aus eben dem Grunde ist auch jeder der Winkel CDB, CDE ein rechter. Da nun die AB der DE gleich, die BD aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden AB, BD den beyden ED, DB gleich, und schliessen rechte Winkel ein; folglich ist (1, 4. S.) die Grundlinie AD der Grundlinie BE gleich. Da ferner die AB der DE, und die AD der BE gleich ist, so sind die beyden

 den



den AB, BE den beyden AD, DE gleich, und haben die AE zur gemeinschaftlichen Grundlinie; folglich ist (1, 8. S.) der Winkel ABE dem Winkel EDA gleich. Aber der Winkel ABE ist ein rechter; folglich ist auch der EDA ein rechter, und mithin die ED auf der DA lothrecht. Sie ist aber auch auf jeder der beyden BD, DC lothrecht; folglich macht die ED mit den drey Linien BD, DA, DC in dem Berührungspunkte rechte Winkel, und mithin sind (11, 5. S.) die drey gerade Linien BD, DA, DC in *einer* Ebene. In eben der Ebene aber, in welcher die BD, DA liegen, liegt auch die AB, denn (11, 2. S.) liegt jedes Dreyeck in *einer* Ebene; folglich liegen die AB, BD, DC in *einer* Ebene, und es ist jeder der Winkel ABD, BDC ein rechter; folglich (1, 28. S.) die AB der CD parallel.

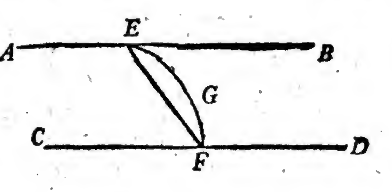
Wenn demnach zwey gerade Linien auf einer Ebene u. s. w. w. z. e. w.

7. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey gerade Linien parallel sind, und man nimmt auf beyden beliebige Punkte an, so liegt die Linie, welche diese Punkte verbindet, mit den Parallelen in *einer* Ebene.

Es seyen die zwey geraden Linien AB, CD parallel, und auf jeder von beyden nehme man einen beliebigen Punkt E, F an, so behaupte ich, dass die gerade Linie, welche die Punkte E, F verbindet, mit den Parallelen in *einer* Ebene liege.

Be-



Beweis. Wäre dies nicht, sondern wäre sie, die Möglichkeit angenommen, über der Ebene, wie die E G F, so lege man durch die E G F eine Ebene, welche die angenommene Ebene (11, 3. S.) in einer geraden Linie schneiden wird. Es sey diese die E F, so schliessen also die zwey geraden Linien E G F, E F einen Raum ein, was (12. Grunds.) unmöglich ist. Folglich liegt die von dem Punkte E nach dem Punkte F gehende gerade Linie nicht über der Ebene, und mithin in ebenderselben, die durch die Parallelen A B, C D gehet.

Wenn demnach zwey gerade Linien parallel sind, u. s. w. w. z. e. w.

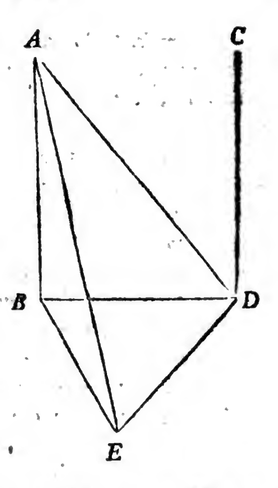
8. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey gerade Linien parallel sind, und die eine von ihnen auf einer Ebene lothrecht steht, so stehet auch die andere auf derselben Ebene lothrecht.

Es seyen die zwey geraden Linien A B, C D parallel, und die eine von ihnen, A B, sey auf der angenommenen Ebene lothrecht, so behaupte ich, dass auch die andere, C D, auf derselben Ebene lothrecht sey.

Beweis. Die Linien A B, C D treffen die Ebene in den Punkten B, D, und man ziehe die B D, so sind (11, 7. S.) die A B, D C, B D in *einer* Ebene. Man errichte in der angenommenen Ebene auf der B D die D E lothrecht, mache die D E der A B gleich, und ziehe die B E, A E, A D. Da nun die A B auf der Ebene lothrecht ist, so ist sie (11, 3. Erkl.) auch auf allen geraden Linien, die

die sie in derselben Ebene berühren, lothrecht, folglich ist jeder der Winkel ABD, ABE ein rechter. Weil aber die Parallelen AB, CD von der Linie BD geschnitten werden, so sind (1, 29. S.) die Winkel ABD, CDB zwey rechten gleich. Der Winkel ABD aber ist ein rechter; folglich ist auch der CDB ein rechter, und mithin die CD auf der BD lothrecht. Da ferner die AB der DE gleich, die BD aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden AB, BD den beyden



ED, DB gleich, auch ist der Winkel ABD dem Winkel EDB gleich, denn jeder von beyden ist ein rechter; folglich ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie AD der Grundlinie BE gleich. Da ferner die AB der DE und die BE der AD gleich ist, so sind die beyden AB, BE den beyden ED, DA stückweise gleich, und die AE ist ihre gemeinschaftliche Grundlinie; folglich ist (1, 8. S.) der Winkel ABE dem Winkel EDA gleich. Der Winkel ABE aber ist ein rechter; folglich ist auch der EDA ein rechter, und mithin die ED auf der DA lothrecht. Sie ist aber auch auf der BD lothrecht; folglich ist (11, 4. S.) die ED auf der Ebene durch die BD, DA lothrecht, und macht mit allen geraden Linien, die sie in derselben Ebene berühren, rechte Winkel. Aber in der Ebene durch die BD, AD liegt die DC, weil (11, 2. S.) die AB, BD in der Ebene durch die BD, DA liegen. In eben der Ebene aber, in welcher die AB, BD liegen, liegt (11, 7. S.) auch die DC, folglich ist die ED auf der DC, und mithin auch die CD auf der DE lothrecht. Aber die CD ist auch lothrecht auf der BD; folglich ist die CD auf den zwey geraden Linien DE, DB die einander schneiden, in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte D, und daher

(11,

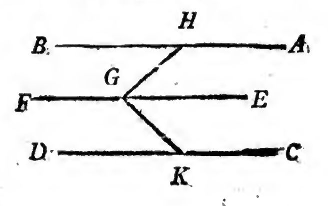
(11, 4. S.) auch auf der Ebene durch die beyden D*E*, DB lothrecht. Aber die Ebene durch die DE, DB ist die angenommene; folglich ist die CD auf der angenommenen Ebene lothrecht w. z. e. w.

9. *Saz.*

Lehrsaz. Gerade Linien die *einer* dritten parallel sind, und nicht mit ihr in *einer* Ebene liegen, sind auch einander selbst parallel.

Es seyen die beyden Linien AB, CD der dritten *E*F parallel, auch liegen sie nicht mit ihr in *einer* Ebene, so behaupte ich, dass die AB der CD parallel sey.

Beweis. Man nehme in der Linie EF nach Belieben einen Punkt G, errichte in demselben auf der *E*F, in der Ebene durch *E*F, AB, die GH, und in der Ebene durch F*E*, CD die GK lothrecht.



Da nun die *E*F auf den beyden GH, GK lothrecht ist, so ist (11, 4. S.) die *E*F auch auf der Ebene durch GH, GK lothrecht: auch ist die *E*F der AB parallel; folglich ist (11, 8. S.) auch die AB auf der Ebene durch H, G, K lothrecht. Aus eben den Gründen ist auch die CD auf der Ebene durch H, G, K lothrecht; folglich sind die beyden AB, CD auf der Ebene durch H, G, K lothrecht. Wenn aber zwey gerade Linien auf einerley Ebene lothrecht sind, so sind sie (11, 6. S.) einander parallel; folglich ist die AB der CD parallel, w. z. e. w.

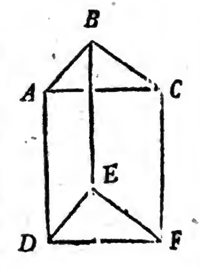
10. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey gerade Linien, die einander berühren, zwey andern, die einander berühren, parallel, und nicht mit ihnen in

in *einer* Ebene ſind, ſo ſchlieſſen ſie gleiche Winkel ein.

Zwey gerade Linien, die einander berühren, AB, BC ſeyen zwey andern geraden Linien die einander berühren DE, EF parallel, und nicht in *einer* Ebene mit ihnen, ſo behaupte ich, daſs der Winkel ABC dem Winkel DEF gleich ſey.

Beweis. Man nehme die BA, BC, ED, EF einander gleich, und ziehe die AD, CF, BE, AC, DF. Da nun die BA der ED gleich und parallel iſt, ſo iſt (1, 35. S.) auch die AD der BE gleich und parallel. Aus eben dem Grunde iſt auch die CF der BE gleich und parallel; folglich iſt jede der beyden AD, CF der BE gleich und parallel. Gerade Linien aber die *einer* dritten parallel ſind, ſind (11, 9. S.) auch einander ſelbſt parallel; folglich iſt die AD der CF parallel und gleich, und dieſe beyden werden durch die Linien AC, DF verbunden; folglich iſt auch die AC der DF gleich und parallel. Und da die zwey geraden Linien AB, BC den zweyen DE, EF gleich ſind, und die Grundlinie AC der Grundlinie DF gleich iſt, ſo iſt (1, 8. S.) auch der Winkel ABC dem Winkel DEF gleich.



Wenn demnach zwey gerade Linien, die einander berühren u. ſ. w. z. e. w.

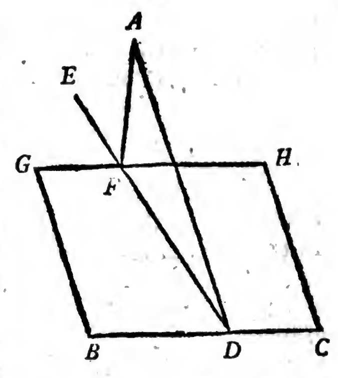
11. *Saz.*

Aufgabe. Von einem gegebenen Punkte über einer Ebene ein Loth auf die Ebene zu fällen.

Es ſey der gegebene Punkt A, die gegebene Ebene ſey die vorliegende, und man ſoll von dem Punkte A auf die vorliegende Ebene ein Loth fällen.

Aufföſung. Man ziehe in der vorliegenden Ebene nach Belieben eine gerade Linie BC, und fälle (1, 12. S.) von dem

dem Punkte A auf die Linie BC die AD lothrecht. Ist nun die AD auch auf der vorliegenden Ebene lothrecht, so ist das verlangte geschehen. Ist dies aber nicht, so errichte man (1, 11. S.) in dem Punkte D auf der Linie BC in der vorliegenden Ebene die DE lothrecht, fälle hierauf (1, 12. S.) von dem Punkte A auf die Linie DE das Loth AF, und ziehe durch den Punkt F die GH der BC parallel.



Beweis: Da die BC auf den beyden DA, DE lothrecht ist, so ist sie (11, 4. S.) auch auf der Ebene durch ED, DA lothrecht, auch ist sie der GH parallel. Wenn aber zwey gerade Linien parallel sind, und es ist die eine von ihnen auf einer Ebene lothrecht; so ist (11, 8. S.) auch die andere auf derselben Ebene lothrecht; folglich ist auch die GH auf der Ebene durch ED, DA, und mithin (11, 3. Erkl.) auch auf allen geraden Linien, die sie in derselben Ebene berühren, lothrecht. Es berührt aber die AF die GH, und ist in der Ebene durch ED, DA; folglich ist die GH auf der FA, und mithin auch die FA auf der GH, lothrecht. Es ist aber auch die AF auf der DE lothrecht; folglich ist die AF auf den beyden GH, DE lothrecht. Wenn aber eine gerade Linie auf zwey andern, die einander berühren, in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte lothrecht ist, so ist sie (11, 4. S.) auch auf der Ebene durch diese beyden lothrecht; folglich ist die FA auf der Ebene durch ED, GH lothrecht. Die Ebene durch ED, GH aber ist die vorliegende; folglich ist die AF auf der vorliegenden Ebene lothrecht.

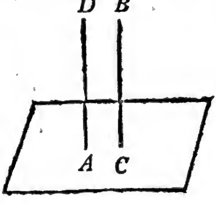
Dem-

Demnach ist von dem gegebenen Punkte A über der Ebene das Loth AF auf die vorliegende Ebene gefällt worden, w. z. z. v. w.

12. *Saz.*

Aufgabe. Auf einer gegebenen Ebene in einem auf derselben gegebenen Punkte ein Loth aufzurichten.

Es sey die gegebene Ebene die vorliegende, der in ihr gegebene Punkt sey A, man soll in dem Punkte A auf der vorliegenden Ebene ein Loth aufrichten.



Auflösung. Man nehme einen Punkt B über der Ebene an, und fälle (11, 11. S.) von diesem auf die vorliegende Ebene das Loth BC, alsdann ziehe man (1, 31. S.) durch den Punkt A mit der BC die AD parallel.

Beweis. Da nun die zwey geraden Linien AD, BC parallel sind, und die eine von ihnen BC auf der vorliegenden Ebene lothrecht ist, so ist (11, 8. S.) auch die andere auf der vorliegenden Ebene lothrecht.

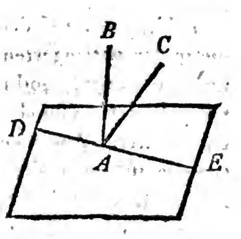
Demnach ist auf der gegebenen Ebene in einem auf ihr gegebenen Punkte ein Loth errichtet worden, w. z. v. w.

13. *Saz.*

Lehrsaz. Auf einerley Ebene können in einerley Punkte nicht zwey gerade Linien auf einerley Seite lothrecht errichtet werden.

Beweis. Gesezt, dies wäre möglich, so errichte man auf die gegebene Ebene in dem Punkte A derselben die zwey geraden Linien AB, AC, lothrecht, und lege die Ebene durch BA, AC, welche die vorliegende Ebene (11, 3. S.)

3. S.) in einer geraden Linie durch den Punkt A schneiden wird. Sie schneide sie in der Linie D A *E*, so liegen die Linien A B, A C, D A *E* in *einer* Ebene. Weil aber die C A auf der vorliegenden Ebene lothrecht ist, so macht sie (11, 3. Erkl.) mit allen geraden Linien, die sie in derselben Ebene berühren, rechte Winkel. Es berührt aber die gerade Linie D A *E* die C A in der vorliegenden Ebene; folglich ist der Winkel C A *E* ein rechter. Aus eben den Gründen ist auch der Winkel B A *E* ein rechter; folglich ist der Winkel C A *E* dem B A *E* gleich, und beyde sind in *einer* Ebene, welches (9. Grunds.) unmöglich ist.



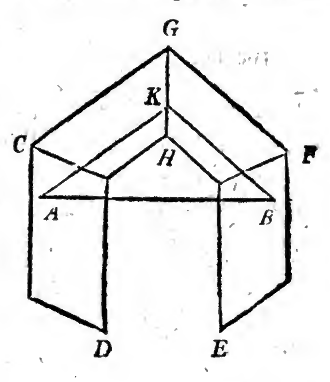
Demnach können auf einerley Ebene in einerley Punkte u. s. w. w. z. e. w.

14. *Saz.*

Lehrsaz. Ebenen, auf welchen einerley gerade Linie lothrecht ist, sind parallel.

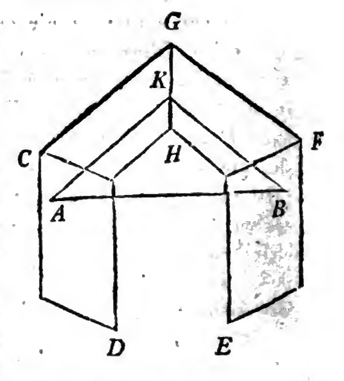
Es sey auf den beyden Ebenen C D, *E* F die Linie A B lothrecht, so behaupte ich, dass diese Ebenen parallel seyen.

Beweis. Wäre dies nicht, so müssten sie verlängert zusammentreffen. Sie treffen also zusammen; alsdann haben sie (11, 3. S.) zum gemeinschaftlichen Durchschnitte eine gerade Linie. Es sey diese die GH, so nehme man in derselben den Punkt K an, und ziehe die A K, B K. Da nun die A B auf der Ebene *E* F lothrecht ist, so ist sie (11,



3. Erkl.)

3. Erkl.) auch auf der BK, die in der verlängerten Ebene EF liegt, lothrecht; folglich der Winkel ABK ein rechter. Aus eben dem Grunde ist auch der Winkel BAK ein rechter, und mithin sind die zwey Winkel ABK, BAK zwey rechten gleich, welches (1, 17. S.) unmöglich ist; folglich treffen die Ebenen CD, EF verlängert nicht zusammen, und mithin ist CD der EF parallel.



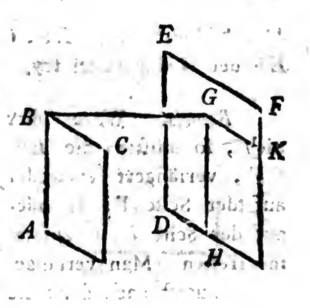
Demnach sind Ebenen u. s. w. w. z. e. w.

15. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey einander berührende gerade Linien zwey andern einander berührenden geraden Linien parallel sind, und nicht mit ihnen in *einer* Ebene liegen, so sind auch die Ebenen, die durch diese Linien gehen, einander parallel.

Die beyden einander berührenden geraden Linien AB, BC seyen den beyden einander berührenden geraden Linien DE, EF parallel, und nicht mit ihnen in *einer* Ebene, so behaupte ich, dass auch die Ebene durch AB, BC mit der Ebene durch DE, EF verlängert nicht zusammentreffe.

Beweis. Man fälle (11, 11. S.) von dem Punkte B auf die Ebene durch DE, EF das Loth BG, welches die Ebene in dem Punkte G treffe, hierauf ziehe man durch den Punkt G (1, 31. S.) der ED die GH, und der EF die GK parallel. Da nun die BG auf der Ebene durch



durch ED, EF lothrecht ist, so macht sie (11, 3. Erkl.) mit allen geraden Linien, die sie in derselben Ebene berühren, rechte Winkel. Es berühren sie aber die beyden GH, GK, welche in der Ebene durch DE, EF liegen; folglich ist jeder der Winkel BGH, BGK ein rechter. Da nun (11, 9. S.) die BA der GH parallel ist, so sind (1, 29. S.) die Winkel GBA, BGH zwey rechten gleich. Der Winkel BGH aber ist ein rechter; folglich ist auch der Winkel GBA ein rechter, und mithin die GB auf der BA lothrecht. Aus eben dem Grunde ist auch die BG auf der BC lothrecht. Da nun die Linie BG auf den beyden einander schneidenden Linien BA BC lothrecht ist, so ist (11, 4. S.) die BG auch auf der Ebene durch AB, BC lothrecht. Sie ist aber auch auf der Ebene durch DE, EF lothrecht, folglich ist die BG auf den beyden Ebenen, die durch AB, BC, und durch DE, EF gehen, lothrecht. Ebenen aber, auf welchen einerley gerade Linie lothrecht ist, sind (11, 14. S.) parallel; folglich ist die Ebene durch AB, BC der Ebene durch ED, EF parallel.

Wenn demnach zwey gerade Linien u. s. w. w. z. e. w.

16. *Saz.*

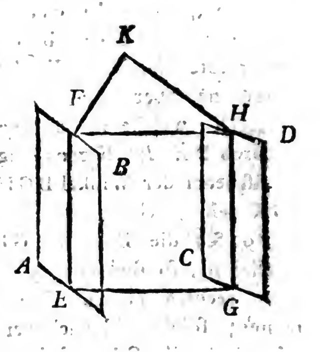
Lehrsaz. Wenn zwey parallele Ebenen von einer Ebene geschnitten werden, so sind ihre gemeinschaftlichen Durchschnitte auch parallel.

Die zwey parallelen Ebenen AB, CD werden von der Ebene $EFGH$ geschnitten, und ihre gemeinschaftlichen

Durch-

Durchschnitte seyen *E*F, GH, so behaupte ich, dass die *E*F der GH parallel sey.

Beweis. Wäre dies nicht, so müssten die *E*F, GH, verlängert entweder auf den Seite F, H oder auf der Seite *E*, G zusammentreffen. Man verlängere sie zuerst nach der Seite F, H zu, und sie treffen in dem Punkte K zusammen. Da nun die *E*FK in der Ebene AB liegt, so liegen auch alle Punkte, die man in der *E*FK annehmen mag, in derselben Ebene. Einer von den Punkten in der Linie EFK ist nun der Punkt K; folglich liegt der Punkt K in der Ebene AB. Aus eben dem Grunde liegt der Punkt K auch in der Ebene CD; folglich treffen die Ebenen AB, CD verlängert zusammen. Sie treffen aber nicht zusammen, da sie nach der Voraussezung, parallel sind; folglich treffen die Linien *E*F, GH an der Seite F, H verlängert nicht zusammen. Eben so kann aber gezeigt werden, dass die Linien *E*F, GH auch an der Seite *E*, G verlängert nicht zusammentreffen. Linien aber, die an keiner Seite zusammentreffen, sind (1, 35. Erkl.) parallel; folglich ist die *E*F der GH parallel.



Wenn demnach zwey parallele Ebenen u. s. w. w. z. e. w.

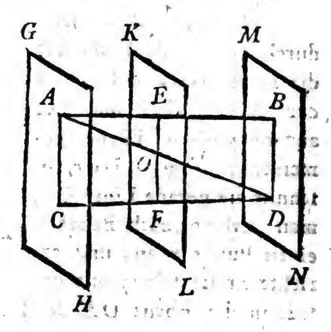
17. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey gerade Linien von parallelen Ebenen geschnitten werden so werden sie nach einerley Verhältnisse geschnitten.

Die

Die beyden geraden Linien AB, CD werden von den parallelen Ebenen GH, KL, MN in den Punkten A, E, B, C, F, D, geschnitten, so behaupte ich, dass die Linie AE zu der EB sich verhalte wie die CF zu der FD.

Beweis. Man ziehe die AC, BD, AD, und die AD begegne der Ebene KL in dem Punkte O, so ziehe man noch die EO, OF.



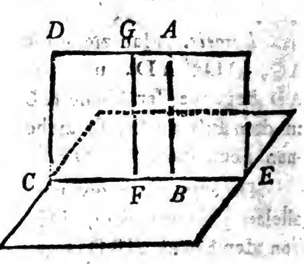
Da nun die zwey parallelen Ebenen KL, MN von der Ebene EBDO geschnitten werden, so sind (11, 16. S.) ihre gemeinschaftlichen Durchschnitte EO, BD parallel. Aus eben den Gründen sind, da die beyden parallelen Ebenen GH, KL von der Ebene AOFC geschnitten werden, ihre gemeinschaftlichen Durchschnitte AC, FO parallel. Da nun mit der Seite BD des Dreyecks ABD die EO parallel gezogen ist, so verhält sich (6, 2. S.) die AE zu der EB wie die AO zu der OD. Da ferner mit der Seite AC des Dreyecks ADC die OF parallel gezogen ist, so verhält sich die AO zu der OD wie die CF zu der FD. Es ist aber gezeigt worden, dass die AO zu der OD sich verhalte wie die AE zu der EB; folglich verhält sich (5, 11. S.) die AE zu der EB wie die CF zu der FD.

Wenn demnach zwey gerade Linien von parallelen Ebenen geschnitten werden u. s. w. w. z. e. w.

18. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene lothrecht ist, so sind auch alle Ebenen, die durch sie gehen, auf der nämlichen Ebene lothrecht.

Es sey die gerade Linie AB auf der angenommenen Ebene lothrecht; so behaupte ich, dass auch alle Ebenen, die durch die AB gehen, auf der angenommenen Ebene lothrecht seyen.



Beweis. Man lege durch die gerade Linie AB die Ebene D*E*, und es sey der Ebene D*E* und der angenommenen Ebene gemeinschaftlicher Durchschnitt die gerade Linie C E, man nehme nach Belieben einen Punkt F an, und errichte in demselben auf der C*E* in der Ebene D*E* die FG lothrecht.

Da nun die AB auf der angenommenen Ebenen lothrecht ist, so ist sie (11, 3. Erkl.) auch auf allen geraden Linien, die sie in der angenommenen Ebene berühren, lothrecht; folglich ist sie auch auf der C*E* lothrecht, und mithin ist der Winkel ABF ein rechter. Aber auch der Winkel GFB ist ein rechter; folglich (1, 28. S.) die AB der FG parallel. Es ist aber die AB auf der angenommenen Ebene lothrecht; folglich ist (11, 8. S.) auch die FG auf eben der Ebene lothrecht. Aber (11, 4. Erkl.) ist eine Ebene auf einer andern lothrecht, wenn alle auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitte in der einen Ebene lothrecht errichteten geraden Linien auch auf der andern Ebene lothrecht sind. Nun ist aber von der Linie *F*G, die auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitte C*E* der beyden Ebenen, in der einen Ebene D*E* lothrecht errichtet ist, gezeigt worden, dass sie auf der angenommenen Ebene lothrecht sey; folglich ist die Ebene D*E* lothrecht auf der angenommenen Ebene. Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, dass auch alle Ebenen, die durch die Linie AB gehen, auf der angenommenen Ebene lothrecht seyen.

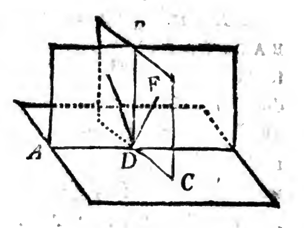
Wenn demnach eine gerade Linie auf einer Ebene lothrecht ist, u. s. w. w. z. e. w.

21. *Satz.*

19. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn zwey einander ſchneidende Ebenen auf einer Ebene lothrecht ſind, ſo iſt ihr gemeinſchaftlicher Durchſchnitt auf der nämlichen Ebene lothrecht.

Die zwey einander ſchneidenden Ebenen AB, BC ſeyen auf der angenommenen Ebene lothrecht, und ihr gemeinſchaftlicher Durchſchnitt ſey BD, ſo behaupte ich, daſs die Linie BD auf der angenommenen Ebene lothrecht ſey.



Beweis. Geſezt, dies wäre nicht, ſo errichte man (1, 11. S.) in dem Punkte D auf der Linie AD in der Ebene AB die DE, in der Ebene BC aber auf der Linie CD die DF lothrecht.

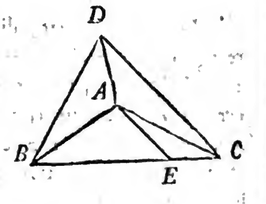
Da nun die Ebene AB auf der angenommenen Ebene lothrecht iſt, und auf dem gemeinſchaftlichen Durchſchnitte AD derſelben in der Ebene AB die Linie DE lothrecht errichtet worden, ſo iſt die DE auf der angenommenen Ebene lothrecht. Auf eben die Art kann nun gezeigt werden, daſs auch die DF auf der angenommenen Ebene lothrecht ſey; folglich ſind auf der angenommenen Ebene in einerley Punkte D an einerley Seite zwey gerade Linien lothrecht errichtet worden, welches (11, 13. S.) unmöglich iſt. Demnach ſind in dem Punkte D auf der angenommenen Ebene keine andere gerade Linien lothrecht, als der gemeinſchaftliche Durchſchnitt DB der Ebenen AB, BC.

Wenn demnach zwey Ebenen, die einander ſchneiden u. ſ. w. w. z. e. w.

20. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn ein körperlicher Winkel von drey ebenen Winkeln eingeschlossen wird, so sind jede zwey zusammen grösser, als der dritte, wie man sie auch zusammen nehmen mag.

Der körperliche Winkel bey A werde von den drey ebenen Winkeln BAC, CAD, BAD eingeschlossen, so behaupte ich, dass von den Winkeln BAC, CAD, BAD jede zwey zusammengenommen grösser, als der dritte, seyen.



Beweis. Wenn die Winkel BAC, CAD, BAD einander gleich sind, so ist es für sich selbst klar, dass jede zwey zusammen grösser, als der dritte, seyen. Ist dies aber nicht, so sey BAC der grössere, und man seze (1, 32. S.) an den Punkt A' der Linie AB, in der Ebene durch den Winkel BAC, den Winkel BAE, der dem Winkel DAB gleich sey, und mache (1, 3. S.) die AD der AE gleich. Hierauf ziehe man durch den Punkt E die Linie BEC, welche die Linien BA, AC in den Punkten B, C schneide, endlich ziehe man noch die DB, DC. Da nun die DA der AE gleich, die AB aber gemeinschaftlich ist, so sind die beyden DA, AB den beyden AE, AB gleich, auch ist der Winkel DAB dem Winkel BAE gleich; folglich ist (1, 4. S.) die Grundlinie DB der Grundlinie BE gleich. Da nun ferner die zwey Linien DB, DC grösser sind, als die BC, und gezeigt worden ist, dass die DB der BE gleich sey, so ist auch der Rest DC grösser, als der Rest EC. Da aber die DA der AE gleich, und die AC gemeinschaftlich ist, auch die Grundlinie DC grösser ist, als die Grundlinie EC, so ist (1, 25. S.) der Winkel DAC grösser, als der Winkel EAC. Es ist aber auch gezeigt worden, dass der Winkel DAB dem Winkel BAE gleich sey; folglich sind die Winkel

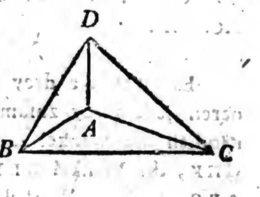
kel DAB, DAC gröſſer, als der Winkel BAC. Auf gleiche Art kann nun von jeden zwey andern, wie man ſie auch zuſammen nehmen mag, gezeigt werden, daſs ſie zuſammen gröſſer, als der dritte, ſeyen.

Wenn demnach ein körperlicher Winkel von drey ebenen Winkeln eingeſchloſſen wird u. ſ. w. w. z. e. w.

21. *Saz.*

Lehrſaz. Jeder körperliche Winkel wird von ebenen Winkeln eingeſchloſſen, die zuſammen weniger, als vier rechte, betragen.

Es ſey der körperliche Winkel bey A von den ebenen Winkeln BAC, CAD, DAB eingeſchloſſen, ſo behaupte ich, daſs die Winkel BAC, CAD, BAD kleiner, als vier rechte, ſeyen.



Beweis. Man nehme auf den Linien AB, AC, AD nach Belieben die Punkte B, C, D, und ziehe die Linien BC, CD, DB. Da nun der körperliche Winkel bey B von den drey ebenen Winkeln CBA, ABD, CBD eingeſchloſſen wird, ſo ſind (11, 20. S.) von dieſen jede zwey zuſammen gröſſer, als der dritte; folglich ſind die Winkel CBA, ABD zuſammen gröſſer, als der Winkel CBD. Aus eben den Gründen ſind auch die Winkel BCA, ACD gröſſer, als der Winkel BCD, und die Winkel CDA, ADB gröſſer, als der Winkel CDB; folglich ſind die ſechs Winkel CBA, ABD, BCA, ACD, ADC, ADB gröſſer, als die drey Winkel CBD, BCD, CDB Aber die drey Winkel CBD, BCD, CDB ſind (1, 32. S.) zwey rechten gleich; folglich ſind die ſechs Winkel CBA, ABD, BCA, ACD, ADC, ADB gröſſer, als zwey rechte. Da aber in jedem der Dreyecke ABC, ACD, ADB die drey Winkel zuſammen zwey rechten gleich ſind; ſo ſind in allen drey Drey-

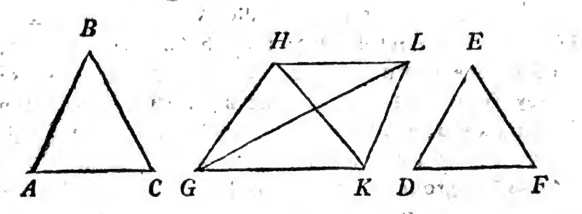
ecken die neun Winkel, CBA, ACB, BAC, ACD, DAC, CDA, ADB, DBA, BAD sechs rehten Winkeln gleich. Von diesen aber sind die sechs Winkel ABC, BCA, ACD, CDA, ADB, DBA grösser, als zwey rechte; folglich sind die drey übrigen Winkel BAC, CAD, DAB, die den körperlichen Winkel einschliessen, kleiner, als zwey rechte.

Demnach wird jeder körperliche Winkel u. s. w. w. z. e. w.

22. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn man drey ebene Winkel hat, deren jede zwey zusammen grösser, als der dritte, sind, und diese von gleichen geraden Linien eingeschlossen werden, so ist es möglich aus den Linien, welche jene gleiche gerade Linien verbinden, ein Dreyeck zu errichten.

Es seyen die drey ebenen Winkel ABC, DEF, GHK deren jede zwey zusammen grösser, als der dritte, seyen, nämlich die Winkel ABC, DEF grösser, als der Winkel GHK, die Winkel DEF, GHK grösser, als der Winkel ABC, und die Winkel GHK, ABC grösser, als der Winkel DEF, und es seyen die geraden Linien AB, BC, DE, EF, GH, HK einander gleich, und man ziehe die AC, DF, GK, so behaupte ich, es sey möglich, aus Linien, die



den dreyen AC, DF, GK gleich sind, ein Dreyeck zu errich-

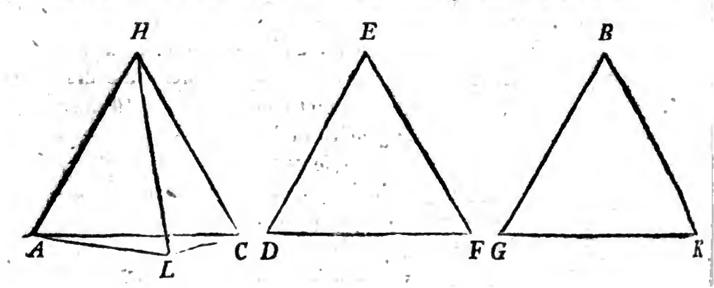
richten, das heisst, von den Linien AC, DF, GK, seyen jede zwey zusammen grösser, als die dritte.

Beweis. Wenn die Winkel ABC, DEF, GHK einander gleich sind, so ist offenbar, dass, da nun auch die AC, DF, GK einander gleich werden, aus Linien, die diesen gleich sind, ein Dreyeck errichtet werden könne. Ist aber dies nicht, so seyen sie ungleich, und man seze (1, 23. S.) an den Punkt H der geraden Linie HK den Winkel KHL, der dem Winkel ABC gleich sey, mache die Linie HL einer von den Linien AB, BC, DE, EF, GH, HK gleich, und ziehe die GL, KL. Da nun die zwey Linien AB, BC, den zwey Linien KH, HL gleich sind, und der Winkel bey B dem Winkel KHL gleich ist, so ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie AC der Grundlinie KL gleich. Da ferner die Winkel ABC, GHK grösser sind, als der Winkel DEF, der Winkel ABC aber dem Winkel KHL gleich ist, so ist der Winkel GHL grösser, als der Winkel DEF. Da ferner die zwey Seiten GH, HL den zwey Seiten DE, EF gleich sind, aber der Winkel GHL grösser ist, als der Winkel E, so ist (1, 24. S.) die Grundlinie GL grösser, als die Grundlinie DF. Aber (1, 20. S.) sind die GK, KL grösser, als die GL; folglich sind noch vielmehr die GK, KL grösser, als die DF. Es ist aber die KL der AC gleich; folglich sind auch die AC, GK grösser, als die DF. Auf eben die Art kann nun gezeigt werden, dass auch die AC, DF grösser, als die GK, die GK, DF aber grösser, als die AC seyen; folglich ist es (1, 22. S.) möglich, aus Linien die den dreyen AC, DF, GK gleich sind, ein Dreyeck zu errichten.

Anderer Beweis.

Es seyen die drey gegebenen ebenen Winkel ABC, DEF, GHK, deren jede zwey zusammen grösser, als der dritte, seyen, sie werden von den gleichen geraden Linien AB, BC, DE, EF, GH, HK eingeschlossen, und man ziehe die Linien AC, DF, GK, so behaupte ich, es sey mög-

möglich, aus Linien, die den dreyen AC, DF, GK gleich ſind, ein Dreyeck zu errichten, das heiſst wiederum, es ſeyen jede zwey derſelben zuſammen gröſſer, als die dritte.



Wenn wiederum die Winkel an den Punkten B, E, H einander gleich ſind, ſo ſind (1, 4. S.) auch die Linien AC, DF, GK einander gleich, und jede zwey derſelben gröſſer, als die dritte. Iſt dies aber nicht, ſo ſeyen die Winkel an den Punkten B, E, H ungleich, und der an dem Punkte B gröſſer, als jeder der beyden an den Punkten E, H; ſo iſt (1, 24. S.) auch die Linie AC gröſſer, als jede der beyden DF, GK, und es erhellet alſo, daſs die AC mit der einen der beyden DF, GK zuſammen gröſſer, als die andere, ſey. Ich behaupte aber, daſs auch die DF, GK zuſammen gröſſer, als die AC, ſeyen. Man ſeze (1, 23. S.) an den Punkt B der Linie AB den Winkel ABL, der dem Winkel GHK gleich ſey, mache die BL einer der Linien AB, BC, DE, EF, GH, HK gleich, und ziehe die AL, LC. Da nun die beyden AB, BL den beyden GH, HK ſtückweiſe gleich ſind, und gleiche Winkel einſchlieſſen, ſo iſt (1, 4. S.) auch die Grundlinie AL der Grundlinie GK gleich. Und da die Winkel an den Punkten E, H gröſſer ſind, als der Winkel ABC, der Winkel GHK aber dem Winkel ABL gleich iſt, ſo iſt der übrige Winkel an dem Punkte E gröſſer, als der Winkel LBC. Da ferner die zwey Seiten LB, BC den zwey Seiten DE, EF ſtückweiſe gleich ſind, der Winkel DEF aber gröſſer iſt, als der Winkel LBC, ſo iſt (1, 24. S.) die Grundlinie DF gröſſer, als die Grundlinie LC. Es iſt aber von

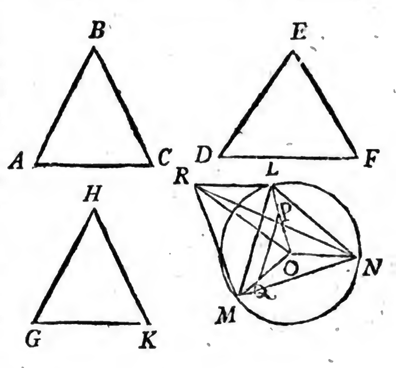
von der GK gezeigt worden, dass sie der AL gleich sey; folglich sind die DF, GK zusammen grösser, als die AL, LC zusammen. Aber (1, 20. S.) sind die AL, LC zusammen grösser, als die AC; folglich sind noch vielmehr die DF, GK zusammen grösser, als die AC, und mithin von den drey Linien AC, DF, GK jede zwey zusammen grösser, als die dritte; folglich ist es (1, 22. S.) auch möglich, aus Linien, die den dreyen AC, DF, GK gleich sind, ein Dreyeck zu errichten, w. z. e. w.

23. *Saz.*

Aufgabe. Aus drey ebenen Winkeln, die zusammen kleiner, als vier rechte, und deren jede zwey zusammen grösser, als der dritte, sind, einen körperlichen Winkel zu errichten.

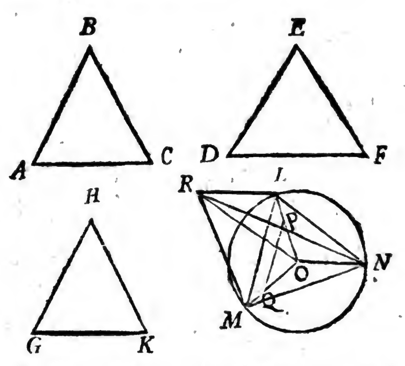
Es seyen die drey gegebenen ebenen Winkel ABC, DEF, GHK, die zusammen kleiner, als vier rechte, und deren jede zwey zusammen grösser, als der dritte, seyen, und man soll aus Winkeln die den dreyen ABC, DEF, GHK gleich sind, einen körperlichen Winkel errichten.

Auflösung. Man mache die AB, BC, DE, EF, GH, HK einander gleich, und ziehe die AC, DF, GK; so ist es (11, 22. S.) möglich, aus Linien, die den dreyen AC, DF, GK gleich sind, ein Dreyeck zu errichten. Man verzeichne also (1, 22. S.) das Dreyeck



LMN so, dass der AC die LM, der DF aber die MN, und der GK die LN gleich sey, alsdann beschreibe man (4, 5. S.) um das Dreyeck LMN den Kreis LMN, und neh-

nehme den Mittelpunkt dieses Kreises, welcher entweder innerhalb des Dreyecks LMN, oder auf eine seiner Seiten, oder ausserhalb desselben fällt.

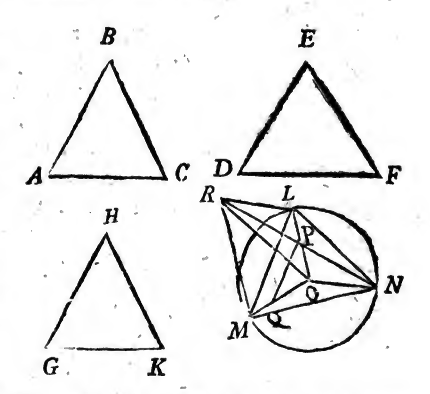


Er falle *zuerst* innerhalb, und sey O, so ziehe man die Linien LO, MO, NO und ich behaupte, dass die AB grösser, als die LO sey.

Wäre dies nicht, so wäre entweder die AB der LO gleich, oder kleiner, als sie. Sie sey ihr *zuerst* gleich. Da die AB der LO, aber auch die AB der BC gleich ist, so ist auch die LO der BC gleich. Es ist aber auch die LO der OM gleich; folglich sind die beyden AB, BC den beyden LO, OM stückweise gleich, und von der Grundlinie AC ist angenommen, dass sie der Grundlinie LM gleich sey; folglich ist (1, 8. S.) der Winkel ABC dem Winkel LOM gleich. Aus eben den Gründen ist auch der Winkel DEF dem MON, und der Winkel GHK dem Winkel NOL gleich; folglich sind die drey Winkel ABC, DEF, GHK den drey Winkeln LOM, MON, NOL gleich. Aber die drey Winkel LOM, MON, NOL sind vier rechten gleich; folglich sind auch die drey Winkel ABC, DEF, GHK vier rechten gleich. Es ist aber angenommen, dass sie kleiner, als vier rechte seyen, welches unmöglich ist; folglich ist die AB der LO nicht gleich. Ich behaupte aber ferner, dass auch die AB nicht kleiner, als die LO, sey. Denn gesezt, dies wäre möglich, so sey sie kleiner, und man mache der AB die OP, und der BC die OQ gleich, und ziehe die PQ. Da nun die AB der BC gleich ist, so ist auch die OP der OQ gleich, folglich auch der Rest PL dem Reste QM, und mit-

mithin (6, 2. S.) die LM der PQ parallel, und das Dreyeck LMO dem Dreyecke PQO gleichwinkelig, folglich verhält sich (6, 4. S.) die OL zu der LM wie die OP zu der PQ, und *verwechselt*, (5, 16. S.) die LO zu der OP wie die LM zu der PQ. Es ist aber die LO grösser, als die OP, folglich auch die LM grösser, als die PQ. Aber die LM ist der AC gleich gemacht worden; folglich ist auch die AC grösser, als die PQ. Da nun die zwey gerade Linien AB, BC den zweyen OP, OQ gleich sind, aber die Grundlinie AC grösser ist, als die Grundlinie PQ, so ist (1, 24. S.) auch der Winkel ABC grösser, als der Winkel POQ. Auf eben die Art kann nun gezeigt werden, dass auch der Winkel DEF grösser sey, als der Winkel MON, und der Winkel GHK grösser, als der Winkel NOL; folglich sind die drey Winkel ABC, DEF, GHK grösser, als die drey LOM, MON, NOL. Aber die Winkel ABC, DEF, GHK sind, nach der Voraussezung, kleiner, als vier rechte; folglich sind noch vielmehr die Winkel LOM, MON, NOL kleiner, als vier rechte. Sie sind aber auch ebensogross, welches unmöglich ist; folglich ist die AB nicht kleiner, als die LO. Es ist aber gezeigt worden, dass sie ihr auch nicht gleich sey; folglich ist die AB grösser, als die LO. Man errichte (11, 12. S.) in dem Punkte O auf der Ebene des Kreises LMN die Linie OR lothrecht, mache das Quadrat von OR, nach dem nachstehenden Lehnsaze, dem Ueberschusse des Quadrats von AB über das Quadrat von LO gleich, und ziehe die Linien RL, RM, RN. Da nun die OR auf der Ebene des Kreises LMN lothrecht ist, so ist sie auch auf jeder der Linien LO, MO, NO (11, 3. Erkl.) lothrecht. Und da die LO der OM gleich, die OR aber gemeinschaftlich und lothrecht ist, so ist (1, 4. S.) die Grundlinie LR der Grundlinie RM gleich. Aus eben den Gründen ist auch die RN jeder der beyden RL, RM gleich, folglich sind die drey Linien RL, RM, RN einander gleich. Und da das Quadrat von OR dem Ueberschusse des Quadrats von AB über das Quadrat von LO gleich gemacht ist, so ist das Quadrat

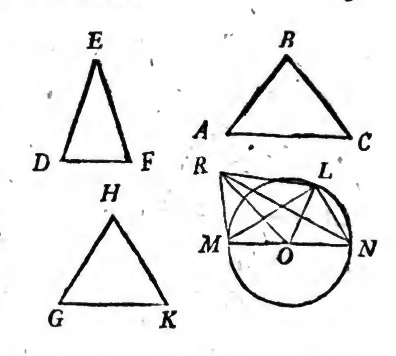
von



von AB den Quadraten von LO, OR gleich. Den Quadraten von LO, OR aber ist (1, 47. S.) das Quadrat von RL gleich, denn der Winkel LOR ist ein rechter; folglich ist das Quadrat von AB dem Quadrate von RL, und mithin die AB der RL, gleich. Aber der AB ist jede der Linien BC, DE, EF, GH, HK, der RL aber jede der beyden RM, RN gleich; folglich ist jede der Linien AB, BC, DE, EF, GH, HK jeder der Linien RL, RM, RN gleich. Da aber die zwey Linien LR, RM den zweyen AB, BC gleich sind, und die Grundlinie LM der Grundlinie AC gleich gemacht ist, so ist (1, 8. S.) der Winkel LRM dem Winkel ABC gleich. Aus eben den Gründen ist auch der Winkel MRN dem Winkel DEF, und der Winkel LRN dem Winkel GHK gleich; folglich ist aus den drey ebenen Winkeln LRM, MRN, LRN, die den drey gegebenen ABC, DEF, GHK gleich sind, an dem Punkte R ein körperlicher Winkel errichtet worden.

Es falle aber nun *zweytens* der Mittelpunkt des Kreises auf eine der Seiten des Dreyecks, nämlich auf die MN, und er sey O, so ziehe man die OL, und ich behaupte wiederum, daſs die AB gröſſer sey, als die OL.

Wäre dies nicht, so wäre die AB der OL entweder gleich, oder kleiner, als sie. Sie sey ihr *erstlich* gleich, so sind die beyden AB, BC, das heiſst, die DE, EF den beyden MO, OL, das heiſst, der MN, gleich. Die MN aber ist der DF gleich gemacht; folglich sind die beyden DE, EF der DF gleich, welches (1, 20. S.) unmöglich ist; folglich ist die AB der OL nicht gleich. Aus ähnlichen



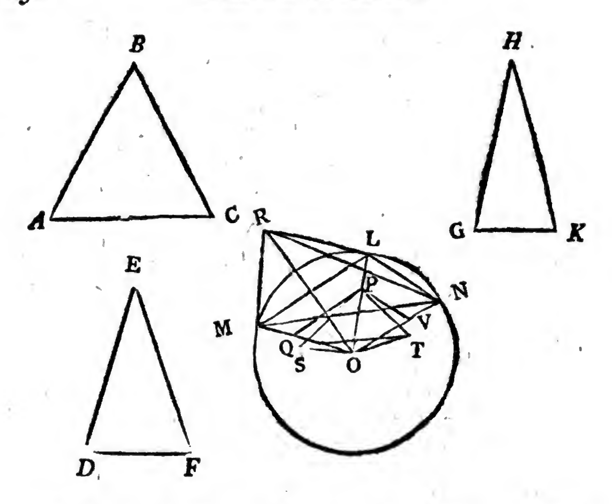
chen Gründen ist sie aber auch nicht kleiner, denn daraus würde eine noch grössere Ungereimtheit erfolgen; folglich ist die AB grösser, als die LO. Wenn nun auf gleiche Art, wie zuvor, das Quadrat von OR, vermittelst des nachstehenden Lehnsazes, dem Ueberschusse des Quadrats von AB über das Quadrat von OL gleich gemacht, und die RO auf der Ebene des Kreises lothrecht aufgestellt wird, so ist die Aufgabe aufgelöset.

Es falle endlich *drittens* der Mittelpunkt des Kreises ausserhalb des Dreyecks LMN, und er sey O, so ziehe man die LO, MO, NO, und ich behaupte, dass auch dann die AB grösser, als die LO, sey.

Wäre dies nicht, so wäre die AB entweder ebensogross, oder kleiner, als die OL. Sie sey *erstlich* ebensogross, so sind die beyden AB, BC den beyden MO, OL stückweise gleich, auch ist die Grundlinie AC der Grundlinie ML gleich; folglich ist (1, 8. S.) der Winkel ABC dem Winkel MOL gleich. Aus eben den Gründen ist auch der Winkel GHK dem Winkel NOL gleich; folglich ist der ganze Winkel MON den beyden ABC, GHK gleich. Aber die Winkel ABC, GHK sind grösser, als der Winkel DEF; folglich ist auch der Winkel MON grösser, als der DEF. Da nun die beyden DE, EF den beyden MO, ON gleich sind, und die Grundlinie DF der Grundlinie MN gleich ist, so ist (1, 8. S.) der Winkel MON dem Winkel DEF gleich. Es ist aber gezeigt worden, dass er grösser sey, als dieser, welches ungereimt ist; folglich ist die AB der OL nicht gleich.

Nun wollen wir zeigen, dass sie auch nicht kleiner sey; folglich muss sie grösser seyn.

Wird



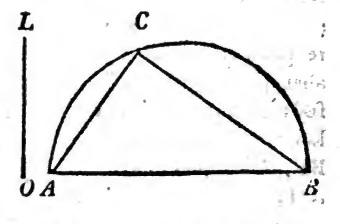
Wird wiederum die OR auf der Ebene des Kreises lothrecht aufgestellt, und der Seite des Quadrats, nach dem folgenden Lehnsaze, gleich gemacht, das dem Ueberschusse des Quadrats von AB über das Quadrat von OL gleich ist, so ist die Aufgabe aufgelöset. Ich behaupte aber, daſs die AB nicht kleiner sey, als die OL.

Sie sey, die Möglichkeit angenommen, kleiner, so mache man der AB die OP, der BC die OQ gleich, und ziehe die PQ. Da nun die AB der BC gleich ist, so ist auch die OP der OQ, folglich auch der Rest PL dem Reste QM, gleich, und mithin (6, 2. S.) die LM der PQ parallel, folglich das Dreyeck LMO dem Dreyecke OPQ gleichwinkelig, und es verhält sich (6, 4. S.) die LO zu der LM wie die OP zu der PQ, und *verwechselt* die LO zu der OP wie die LM zu der PQ. Es ist aber die LO gröſser, als die OP; folglich auch die LM gröſser, als die PQ. Die LM aber ist der AC gleich gemacht, folglich ist auch die AC gröſser, als die PQ. Da nun die beyden AB, BC den beyden OP, OQ stückweise gleich sind, aber die Grundlinie AC gröſser ist, als die Grundlinie PQ, so ist (1, 25. S.) auch der Winkel ABC gröſser, als der Win-

Winkel POQ. Eben ſo kann nun, wenn man die OV jeder der beyden OP, OQ gleich nimmt, und die PV ziehet, gezeigt werden, daſs der Winkel GHK gröſſer, als der Winkel POV, ſey. Man ſeze an den Punkt O der Linie LO den Winkel LOS, der dem Winkel ABC, und den Winkel LOT der dem Winkel GHK gleich ſey, mache die beyden OS, OT der OP gleich, und ziehe die PS, PT, ST. Da nun die beyden AB, BC den beyden OP, OS gleich ſind, und der Winkel ABC dem Winkel POS gleich iſt, ſo iſt (1, 4. S.) auch die Grundlinie AC, das heiſst, LM, der Grundlinie PS gleich. Aus eben den Gründen iſt auch die LN der PT gleich. Und da die beyden ML, NL den beyden PS, PT gleich ſind, und der Winkel MLN gröſſer iſt, als der Winkel SPT, ſo iſt (1, 24. S.) auch die Grundlinie MN gröſſer, als die Grundlinie ST. Aber die MN iſt der DF gleich; folglich iſt auch die DF gröſſer, als die ST. Da nun die beyden DE, EF den beyden SO, OT gleich ſind, aber die Grundlinie DF gröſſer iſt, als die Grundlinie ST, ſo iſt (1, 25. S.) auch der Winkel DEF gröſſer, als der Winkel SOT. Es iſt aber der Winkel SOT den Winkeln ABC, GHK gleich; folglich iſt auch der Winkel DEF gröſſer, als die Winkel ABC, GHK. Er iſt aber auch kleiner, welches unmöglich iſt.

Lehnſaz. Auf welche Art das Quadrat von OR dem Ueberſchuſſe des Quadrats von AB über das Quadrat von LO gleich gemacht werde, kann, wie folgt, gezeigt werden.

Man nehme die geraden Linien AB, LO, und es ſey die gröſſere AB ſo beſchreibe man mit dieſer den Halbkreis ABC, trage in denſelben die der LO gleiche Linie AC, und ziehe die BC.



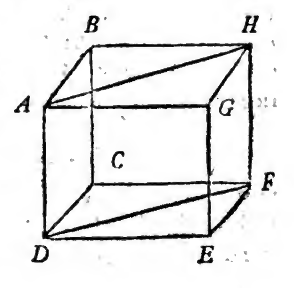
Da

Da nun der Winkel ACB ein Winkel im Halbkreiſe CAB iſt, ſo iſt (3, 31. S.) der Winkel ACB ein rechter, folglich iſt (1, 47. S.) das Quadrat von AB dem Quadrate von AC und dem Quadrate von CB gleich. Es iſt aber die AC der LO gleich, folglich iſt das Quadrat von AB um das Quadrat von CB gröſſer, als das Quadrat von LO. Nimmt man alſo der CB die OR gleich, ſo iſt das Quadrat von AB um das Quadrat von OR gröſſer, als das Quadrat von LO, w. z. v. w.

24. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn ein Körper von parallelen Ebenen eingeſchloſſen wird, ſo ſind ſeine gegenüberliegenden Seitenflächen einander gleich, und Parallelogramme.

Der Körper CDHG werde von den parallelen Ebenen AC, GF, AH, DF, FB, AE, eingeſchloſſen, ſo behaupte ich, daſs ſeine gegenüberliegenden Ebenen einander gleich und Parallelogramme ſeyen.



Beweis. Da die beyden parallelen Ebenen BG, EC von der Ebene AC geſchnitten werden, ſo ſind (11, 16. S.) ihre gemeinſchaftlichen Durchſchnitte parallel, folglich iſt die AB der CD parallel. Da ferner die zwey parallelen Ebenen BF, AE von der Ebene AC geſchnitten werden, ſo ſind ihre gemeinſchaftlichen Durchſchnitte parallel; folglich iſt die AD, der BC parallel. Es iſt aber gezeigt worden, daſs auch die AB der DC parallel ſey; folglich iſt AC ein Parallelogramm. Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, daſs auch die DF, FG, GB, BF, AE, jedes ein Parallelogramm ſey. Man ziehe die AH, DF. Da nun die AB der DC, und die BH der CF parallel iſt, ſo ſind die beyden einander berührenden Li-

Linien AB, BH den beyden einander berührenden Linien DC, CF parallel, und nicht mit ihnen in *einer* Ebene; folglich schliessen sie (11, 10. S.) gleiche Winkel ein; der Winkel ABH ist also dem Winkel DCF gleich. Und da (1, 34. S.) die beyden AB, BH den beyden DC, CF gleich sind, und der Winkel ABH dem Winkel DCF gleich ist; so ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie AH der Grundlinie DF, und das Dreyeck ABH dem Dreyecke DCF gleich. Auch ist (1, 34. S.) von dem Dreyecke ABH das Parallelogramm BG, und von dem Dreyecke DEF das Parallelogramm CE das Doppelte; folglich ist das Parallelogramm BG dem Parallelogramme CE gleich. Eben so kann nun gezeigt werden, dass auch das Parallelogramm AC dem Parallelogramme GF, und das Parallelogramm AE dem Parallelogramme BF gleich sey.

Wenn demnach ein Körper von parallelen Ebenen eingeschlossen wird u. s. w. w. z. e. w.

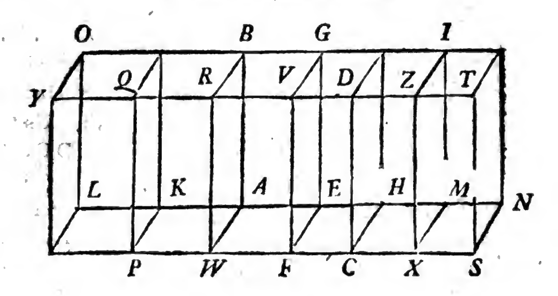
25. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn ein Parallelepipedon durch eine seinen gegenüberliegenden Seitenflächen parallele Ebene geschnitten wird, so verhält sich die eine Grundfläche zur andern wie der eine Körper zum andern.

Das Parallelepipedon ABCD werde von der Ebene VE, die seinen gegenüberliegenden Seitenflächen RA, DH parallel ist, geschnitten, so behaupte ich, dass die Grundfläche AEFW zu der Grundfläche EHCF sich verhalte wie der Körper ABFV zu dem Körper EGCD.

Beweis. Man verlängere die AH auf beyden Seiten, und mache der EH Linien, so viel man will, wie die HM, MN, der AE aber auch Linien, so viel man will, wie die AK, KL, gleich, und vollende die Parallelogramme LP, KW, HX, MS, und die Körper AQ, KY, DM, MT.

Da



Da nun die LK, KA, AE einander gleich ſind, ſo ſind (1, 38. S.) auch die Parallelogramme LP, KW, AF einander gleich. Ebenſo ſind die Parallelogramme KO, KB, AG, und (11, 24. S.) auch die Parallelogramme LY, KQ, AR einander gleich, denn ſie liegen einander gegenüber. Aus eben dem Grunde ſind auch die Parallelogramme EC, HX, MS, und die Parallelogramme HG, HI, IN, deſsgleichen die Parallelogramme DH, MZ, NT einander gleich; folglich ſind in den drey Körpern LQ, KR, AV, drey Seitenflächen einander gleich. Aber dieſe drey ſind ihren gegenüberliegenden gleich; folglich ſind (11, 10. Erkl.) die drey Körper LQ, KR, AV, einander gleich. Aus eben den Gründen ſind auch die drey Körper ED, DM, MT einander gleich. Wievielfach alſo die Grundfläche LF von der Grundfläche AF iſt, ebenſovielfach iſt der Körper LV von dem Körper AV. Aus gleichen Gründen iſt der Körper NV von dem Körper HV ebenſovielfach, als die Grundfläche NF von der Grundfläche HF. Ferner iſt, jenachdem die Grundfläche LF ebenſogroſs, oder gröſſer, oder kleiner iſt, als die Grundfläche NF, auch der Körper LV ebenſogroſs, oder gröſſer, oder kleiner, als der Körper NV. Da nun von den vier Gröſſen, den zwey Grundflächen AF, FH und den zwey Körpern AV, VH, Gleichvielfache genommen worden ſind, nämlich von der Grundfläche AF und dem Körper AV die Grundfläche LF und der Körper LV, von der Grundfläche HF und dem Körper HV aber die Grundfläche NF und der Körper NV, und gezeigt worden iſt, daſs, je-

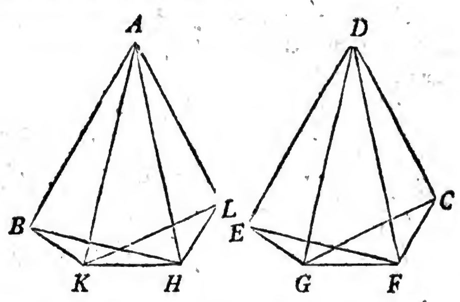
nach-

nachdem die Grundfläche LF gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner iſt, als die Grundfläche NF, auch der Körper LV gröſſer, ebenſogroſs, oder kleiner ſey, als der Körper NV, ſo verhält ſich (5, 5. Erkl.) die Grundfläche AF zur Grundfläche FH wie der Körper AV zum Körper VH w. z. e. w.

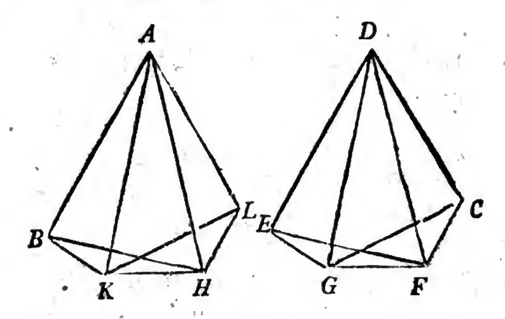
26. *Saz.*

Aufgabe. An eine gegebene gerade Linie und einen in ihr gegebenen Punkt einen Winkel zu ſezen, der einem gegebenen körperlichen Winkel gleich ſey.

Es ſey die gegebene gerade Linie AB, der in ihr gegebene Puukt A, der gegebene körperliche Winkel, der an dem Punkte D, welcher von den ebenen Winkeln EDC, EDF, FDC eingeſchloſſen wird, und man ſoll an die gebene gerade Linie AB und an den in ihr gegebenen Punkt A einen Winkel ſezen, der dem gegebenen körperlichen Winkel bey D gleich ſey.



Auflöſung. Man nehme in der Linie DF einen beliebigen Punkt F, fälle von demſelben (11, 11. S.) auf die Ebene durch ED, DC die FG lothrecht, welche die Ebene in dem Punkte G treffe, und ziehe die DG, hierauf ſeze man (1, 23. S.) an den Punkt A der Linie AB den Winkel BAL, der dem Winkel EDC, und den Winkel BAK, der dem Winkel EDG gleich ſey, alsdann mache



man (1, 3. S.) der DG die AK gleich, und errichte in dem Punkte K (11, 12. S.) auf der Ebene durch BAL die KH lothrecht, mache endlich der GF die KH gleich, und ziehe die HA, ſo behaupte ich, daſs der körperliche Winkel bey A, welcher von den Winkeln BAL, BAH, HAL eingeſchloſſen wird, dem körperlichen Winkel bey D, der von den ebenen Winkeln EDC, EDF, FDC eingeſchloſſen wird, gleich ſey.

Beweis. Man nehme die Linien AB, DE einander gleich, und ziehe die HB, KB, FE, GE. Da nun die FG auf der angenommenen Ebene lothrecht iſt, ſo macht ſie (11, 3. Erkl.) mit allen in der angenommenen Ebene ſie berührenden geraden Linien rechte Winkel; folglich iſt jeder der Winkel FGD, FGE ein rechter. Aus eben den Gründen iſt auch jeder der beyden HKA, HKB ein rechter. Und da die beyden KA, AB den beyden GD, DE ſtückweiſe gleich ſind, und gleiche Winkel einſchlieſſen, ſo iſt (1, 4. S.) auch die Grundlinie BK der Grundlinie EG gleich. Es iſt aber auch die KH der GF gleich, auch ſchlieſſen ſie gleiche Winkel ein; folglich iſt auch die HB der FE gleich. Da ferner die beyden AK, KH den beyden DG, GF gleich ſind, und rechte Winkel einſchlieſſen, ſo iſt auch die Grundlinie AH der DF gleich; auch iſt die AB der DE gleich; folglich ſind die beyden HA, AB den beyden FD, DE gleich, und die Grundlinie HB iſt der Grundlinie FE gleich; folglich iſt auch der Winkel

BAH

BAH dem Winkel EDF gleich. Aus eben den Gründen ist auch der Winkel HAL dem Winkel FDC gleich. Wenn man nämlich die AL, DG einander gleich nimmt, und die KL, HL, GC, FC zieht, so ist, weil der ganze Winkel BAL dem ganzen EDC gleich ist, und der BAK dem EDG gleichgesezt wird, auch der Rest KAL dem Reste GDC gleich. Und da die beyden KA, AL den beyden GD, DC gleich sind, und gleiche Winkel einschliessen, so ist (1, 4. S.) auch die Grundlinie KL der Grundlinie GC gleich. Es ist aber auch die KH der GF gleich; die beyden LK, KH sind also den beyden CG, GF gleich, und schliessen rechte Winkel ein; folglich ist die Grundlinie HL der Grundlinie FC gleich. Da ferner die beyden HA, AL den beyden FD, DC gleich sind, und die Grundlinie HL der Grundlinie FC gleich ist, so ist (1, 8. S.) auch der Wtnkel HAL dem Winkel FDC gleich. Es ist aber auch der Winkel BAL dem Winkel EDC gleich.

Demnach ist an eine gegebene gerade Linie und einen in ihr gegebenen Punkt ein Winkel gesezt worden, der einem gegebenen körperlichen Winkel gleich ist.

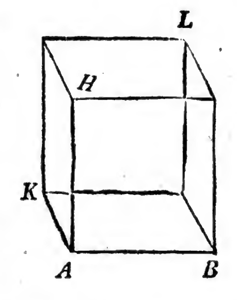
27. *Saz.*

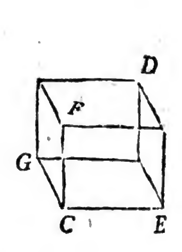
Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie ein Parallelepipedon zu beschreiben, das einem gegebenen Parallelepipedon ähnlich sey und ähnlich liege.

Es sey die gegebene gerade Linie AB, das gegebene Parallelepipedon DC, man soll auf der gegebenen geraden Linie AB ein Parallelepipedon beschreiben, das dem Parallelepipedon DC ähnlich sey und ähnlich liege.

Auflösung. Man seze (11, 26. S.) an den Punkt A der Linie AB einen körperlichen Winkel, der dem körperlichen Winkel bey C gleich sey, und von den Winkeln BAH, HAK, KAB eingeschlossen werde, so dass der Winkel BAH dem Winkel ECF, der Winkel BAK dem Winkel ECG, und der Winkel KAH dem GCF gleich

 sey.





sey. Hierauf mache man (6, 12. S.) die EC zu der CG wie die BA zu der AK, und die GC zu der CF wie die KA zu der AH, folglich (5, 22. S.) *gleichförmig* die EC zu der CF wie die BA zu der AH, endlich vollende man das Parallelogramm BH und den Körper AL.

Beweis. Da die EC zu der CG sich verhält wie die BA zu der AK, so sind die um die gleichen Winkel ECG, BAK liegenden Seiten proportionirt und daher ist (6, 4. S.) dem Parallelogramme KB das Parallelogramm GE ähnlich. Aus eben den Gründen ist auch das Parallelogramm KH dem Parallelogramme GF, und das Parallelogramm FE dem Parallelogramm HB ähnlich; folglich sind die drey Parallelogramme des Körpers CD den drey Parallelogrammen des Körpers AL ähnlich. Aber (11, 24. S.) sind diese drey ihren gegenüberliegenden gleich und ähnlich; folglich ist der ganze Körper CD dem ganzen Körper AL ähnlich.

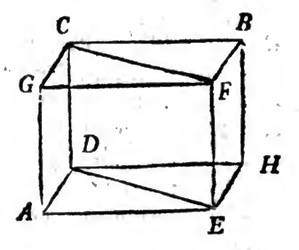
Demnach ist auf der gegebenen Linie AB das Parallelepipedon AL errichtet worden, das dem gegebenen Parallelepipedon CD ähnlich ist und ähnlich liegt, w. z. v. w.

28. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn ein Parallelepipedon von einer Ebene durch die Diagonalen der gegenüberliegenden Seitenflächen geschnitten wird, so wird es durch diese Ebene halbirt.

Das Parallelepipedon AB werde von der Ebene CDEF durch die Diagonalen der gegenüberliegenden Seitenflächen, näm-

nämlich durch die CF, DE geschnitten, so behaupte ich, dass der Körper AB von der Ebene CDEF halbirt werde.



Beweis. Da (1, 34. S.) das Dreyeck CGF dem Dreyecke CBF, das Dreyeck ADE aber dem Dreyecke DEH gleich ist, aber (11, 24. S.) das Parallelogramm CA dem Parallelogramme BE, und das Parallelogramm GE dem Parallelogramme CH gleich ist, weil sie einander gegenüberliegen, so ist (11, 10. Erkl.) das von den zwey Dreyecken CGF, ADE, und den drey Parallelogrammen GE, AC, CE eingeschlossene Prisma dem von den zwey Dreyecken CFB, DEH und den drey Parallelogrammen CH, BE, CE eingeschlossenen Prisma gleich, denn sie werden von gleich vielen und gleich grossen Ebenen eingeschlossen; folglich wird der ganze Körper AB von der Ebene CDEF halbirt, w. z. e. w.

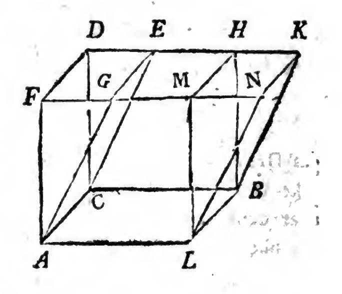
29. *Saz.*

Lehrsaz. Parallelepipeda auf einerley Grundfläche und von einerley Höhe, deren Seitenlinien in einerley geraden Linien sich endigen, sind einander gleich.

Es seyen die Parallelepipeda CM, CN auf einerley Grundfläche AB, und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK endigen sich in einerley geraden Linien FN, DK, so behaupte ich, dass der Körper CM dem Körper CN gleich sey.

Beweis. Da die beyden Figuren CH, CK Parallelogramme sind, so ist (1, 34. S.) die CB jeder der beyden

DH,



DH, EK gleich, folglich ist auch die DH der EK gleich. Man nehme die gemeinscaftliche EH hinweg, so ist auch der Rest DE dem Reste HK, folglich auch (1, 8. S.) das Dreyeck DEC dem Dreyecke HKB gleich. Aber (1, 36. S) ist das Parallelogramm DG dem Parallelogramme HN gleich. Aus eben den Gründen ist auch das Dreyeck AFG dem Daeyecke LMN gleich. Aber (11, 24. S.) ist das Parallelogramm CF dem Parallelogramme BM, und das Perallelogramm CG dem Parallelogramme BN gleich, denn sie sind gegenüberliegend; folglich ist (11, 10. Erkl.) das von den zwey Dreyecken AFG, DEC und den drey Parallelogrammen AD, DG, GC eingeschlossene Prisma dem von den zwey Dreyecken LMN, HBK nnd den drey Parallelogrammen BM, NH, BN eingeschlossenen Prisma gleich. Man seze den gemeinschaftlichen Körper hinzu, dessen Grundfläche das Parallelogramm AB, die gegenüberliegende Seitenfläche aber GEHM ist, so ist das ganze Parallelepipedon CM dem ganzen Parallelepipedon CN gleich.

Demnach sind Parallelepipeda auf einerley Grundfläche u. s. w. w. z. e. w.

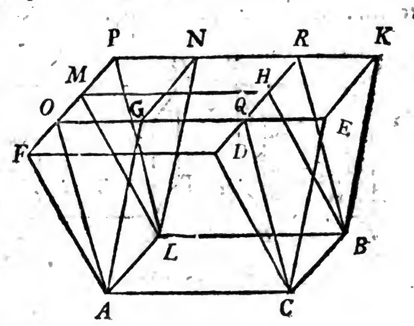
30. *Saz.*

Lehrsaz. Parallelepipeda auf einerley Grundfläche und von einerley Höhe, deren Seitenlinien nicht in einerley geraden Linien sich endigen, sind einander gleich.

Es seyen die Parallelepipeda CM, CN auf einerley Grundfläche AB und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK liegen nicht

in einerley geraden Linien, so behaupte ich, daſs der Körper CM dem Körper CN gleich sey.

Beweis. Man verlängere die NK, DH wie auch die GE, FM, und diese treffen in den Punkten P, R, Q, O zusammen, so ziehe man die AO, LP, CQ, BR. Nun ist (11, 29. S.) der Körper CM, dessen Grundfläche das Parallelogramm ACBL und die ihr entgegengesezte Seitenfläche FDHM ist, dem Körper CP, dessen Grundfläche das Parallelogramm ACBL und die ihr entgegengesezte Seitenfläche OQRP ist, gleich, denn sie sind auf einerley Grundfläche ACBL und ihre Seitenlinien AF, AO, LM, LP, CD, CQ, BH, BR endigen sich in einerley geraden Linien FP, DR. Aber der Körper CP, dessen Grundfläche das Parallelogramm ACBL, und die ihr entgegengesezte Seitenfläche OQRP ist, ist (11, 29. S.) dem Körper CN, dessen Grundfläche das Parallelogramm ACBL und die ihr entgegengesezte Seitenfläche GEKN ist, gleich, denn sie sind auf einerley Grundfläche ACBL und ihre Seitenlinien AG, AO, CE, CQ, LN, LP, BK, BR endigen sich in einerley geraden Linien GQ, NR; folglich ist auch der Körper CM dem Körper CN gleich.



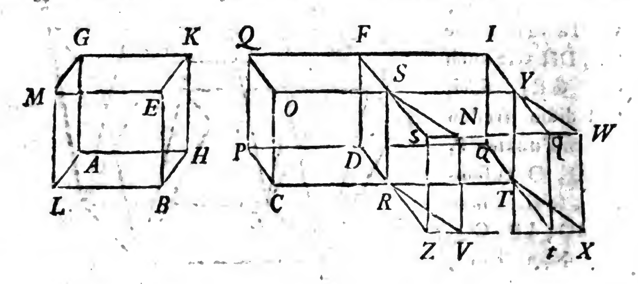
Demnach sind Parallelepipeda auf einerley Grundfläche u. s. w. w. z. e. w.

31. *Saz.*

Lehrsaz. Parallelepipeda auf gleichen Grundflächen und von einerley Höhe sind einander gleich.

Es

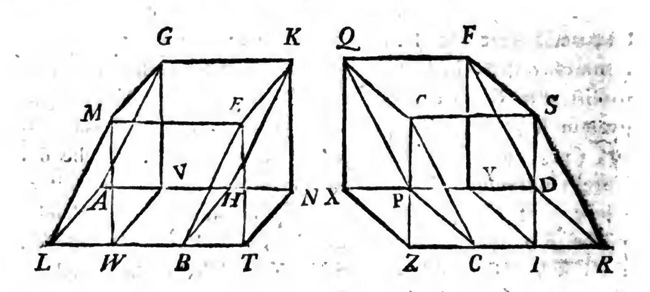
Es seyen die Parallelepipeda AE, CF auf den gleichen Grundflächen AB, CD und von einerley Höhe, so behaupte ich, daſs der Körper AE dem Körper CF gleich sey.



Beweis. Es seyen *zuerst* die Seitenlinien HK, BE, AG, LM, PQ, DF, CO, RS auf den Grundflächen AB, CD lothrecht, der Winkel ALB aber sey dem Winkel CRD ungleich, so verlängere man die CR in gerader Linie nach RT, seze (1, 23. S.) an den Punkt R der geraden Linie RT den Winkel TRV, der dem Winkel ALB gleich sey, und mache der AL die RT, der LB aber die RV gleich, ziehe durch den Punkt V der RT die VX parallel, und vollende die Grundfläche RX, und den Körper VY. Da nun die beyden TR, RV den beyden AL, LB gleich sind, und gleiche Winkel einschlieſsen, so ist das Parallelogramm RX dem Parallelogramme HL gleich und ähnlich. Ferner da die AL der RT, und die LM der RS gleich ist, und beyde gleiche Winkel einschlieſsen, so ist das Parallelogramm RY dem Parallelogramme AM gleich und ähnlich. Aus eben den Gründen ist das Parallelogramm LE dem Parallelogramme SV gleich und ähnlich; folglich sind die drey Parallelogramme des Körpers AE den drey Parallelogrammen des Körpers VY gleich und ähnlich. Aber (11, 24. S.) sind diese drey auch den drey gegenüberliegenden gleich und ähnlich, folglich ist (11, 10. Erkl.) das ganze Parallelepipedon AE dem ganzen Parallelepipedon VY gleich. Man verlängere die DR, XV, und sie treffen in dem Punkte Z zusammen, so ziehe man durch den Punkt T der DZ die Tt parallel,

lel, verlängere die Tt, PD bis sie in dem Punkte A zusammentreffen, und vollende alsdann die Körper ZY, RI, so ist der Körper ZY, dessen Grundfläche das Parallelogramm RY die ihr gegenüberliegende Seitenfläche aber Zq ist, (11, 29. S.) dem Körper YV, dessen Grundfläche das Parallelogramm RY, und die ihr gegenüberliegende Seitenfläche VW ist, gleich, denn sie sind auf einerley Grundfläche RY und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien RZ, RV, Tt, TX, Ss, SN, Yq, YW endigen sich in einerley geraden Linien ZX, sW. Aber der Körper VY ist dem Körper AE gleich; folglich ist auch der Körper YZ dem Körper AE gleich. Ferner da das Parallelogramm RVXT (1, 35. S.) dem Parallelogramme ZT gleich ist, denn sie sind auf einerley Grundlinie RT und in einerley Parallelen RT, ZX, aber auch das Parallelogramm RVXT dem Parallelogramme CD gleich ist, weil es auch dem AB gleich ist, so ist das Parallelogramm ZT dem Parallelogramme CD gleich. Es ist aber DT ein anderes Parallelogramm; folglich verhält sich (5, 7. S.) die Grundfläche CD zu der Grundfläche DT wie die ZT zu der DT. Und da das Parallelepipedon CI von der seinen gegenüberliegenden Seitenflächen parallelen Ebene RF geschnitten wird, so verhält sich (11, 25. S.) die Grundfläche CD zur Grundfläche DT wie der Körper CF zu dem Körper RI. Aus eben den Gründen, weil das Parallelepipedon ZI von der seinen gegenüberliegenden Seitenflächen parallelen Ebene RY geschnitten wird, verhält sich die Grundfläche ZT zur Grundfläche DT wie der Körper ZY zu dem Körper RI. Aber wie die Grundfläche CD zur Grundfläche DT sich verhält, so verhält sich die Grundfläche ZT zu der TD; folglich verhält sich auch der Körper CF zu dem RI (5, 11. S.) wie der Körper ZY zum Körper RI. Da also die beyden Körper CF, ZY zu dem Körper RI einerley Verhältniss haben; so ist (5, 9. S.) der Körper CF dem Körper ZY gleich. Aber von dem Körper ZY ist gezeigt worden, dass er dem Körper AE gleich sey, folglich ist auch der Körper AE dem Körper CF gleich.

Es



Es seyen aber *zweytens* die Seitenlinien AG, HK, BE, LM, CO, PQ, DF, RS auf den Grundflächen AB, CD nicht lothrecht, so behaupte ich wiederum, dass der Körper AE dem Körper CF gleich sey.

Man fälle (11, 11. S.) von den Punkten K, E, G, M, Q, F, O, S auf die angenommene Ebene die Lothe KN, ET, GV, MW, QX FY, OZ, SI, welche die Ebene in den Punkten N, T, V, W, X, Y, Z, I treffen, und ziehe die NT, VW, NV, TW, XY, XZ, ZI, IY, so ist (11, 31. S) der Körper KW dem Körper QI gleich, denn sie sind auf gleichen Grundflächen KM, QS, und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien sind auf den Grundflächen lothrecht. Aber (11, 30. S.) ist der Körper KW dem Körper AE, der Körper QI aber dem Körper CF gleich, denn sie sind auf einerley Grundfläche, und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien endigen sich nicht in einerley geraden Linien; folglich ist auch der Körper AE dem Körper CF gleich.

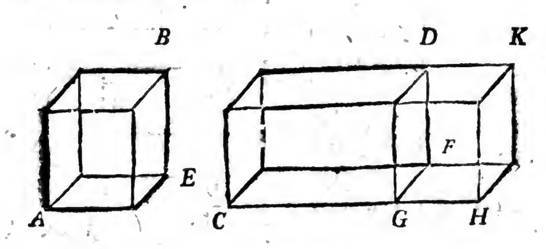
Demnach sind Parallelepipeda auf gleichen Grundflächen u. s. w. w. z. e. w.

32. *Saz.*

Lehrsaz. Parallelepipeda von einerley Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Es seyen die Parallelepipeda AB, CD, welche einerley Höhe haben, so behaupte ich, dass sie sich wie ihre Grund-

Grundflächen verhalten, das heifst, dafs die Grundfläche AE zur Grundfläche CF fich verhalte wie der Körper AB zum Körper CD.



Beweis. Man feze (1, 45. S.) auf die Linie FG das Parallelogramm FH, das dem Parallelogramme AE gleich fey, auf der Grundfläche FH aber, und unter einerley Höhe mit dem CD, errichte man das Parallelepipedon GK, fo ift (11, 31. S.) der Körper AB dem Körper GK gleich, denn fie find auf gleichen Grundflächen AE, FH und von einerley Höhe. Da nun das Parallelepipedon CK von der feinen gegenüberliegenden Seitenflächen parallelen Ebene DG gefchnitten wird, fo verhält fich (11, 25. S.) die Grundfläche HF zur Grundfläche CF wie der Körper HD zum Körper DC. Aber die Grundfläche FH ift der Grundfläche AE, und der Körper GK dem Körper AB gleich; folglich verhält fich auch die Grundfläche AE zur Grundfläche CF wie der Körper AB zum Körper CD.

Demnach verhalten fich Parallelepipeda u. f. w. w. z. e. w.

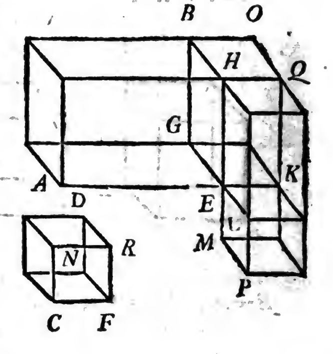
33. *Saz.*

Lehrfaz. Aehnliche Parallelepipeda find in dreymal höherem Verhältniffe ihrer homologen Seiten.

Es feyen die Parallelepipeda AB, CD einander ähnlich, und die Seite AE der Seite CF homolog, fo behaupte ich,

ich, daſs der Körper AB zu dem Körper CD ein dreymal höheres Verhältniſs habe, als die AE zu der CF.

Beweis. Man verlängere die AE, GE, HE in gerader Richtung nach EK, EL, EM, mache der CF die EK, der FN die EL, der FR die EM gleich, und vollende das Parallelogramm KL und den Körper KP.



Da nun die beyden EK, EL den beyden CF, FN gleich ſind, aber auch der Winkel KEL dem Winkel CFN gleich iſt, weil, wegen der Aehnlichkeit der Körper AB, CD, auch der Winkel AEG dem Winkel CFN gleich iſt, ſo iſt das Parallelogramm KL dem Parallelogramme CN gleich und ähnlich. Aus eben den Gründen iſt auch das Parallelogramm KM dem Parallelogramme CR, und das Parallelogramm EP dem Parallelogramme DF gleich und ähnlich, demnach ſind die drey Parallelogramme des Körpers KP den drey Parallelogrammen des Körpers CD gleich und ähnlich. Aber (11, 24. S.) ſind dieſe drey den drey gegenüberliegenden gleich und ähnlich; folglich iſt der ganze Körper KP (11, 10. Erkl.) dem ganzen Körper CD gleich und ähnlich. Man vollende das Parallelogramm GK, und errichte auf den Grundflächen GK, KL, und unter einerley Höhe mit dem AB, die Körper EO, LQ. Da nun wegen der Aehnlichkeit der Körper AB, CD, die AE zu der CF ſich verhält wie die EG zu der FN und wie die EH zu der FR, die CF aber der EK, die FN der EL, und die FR der EM gleich iſt, ſo verhält ſich die AE zu der EK wie die GE zu der EL, und wie die HE zu der EM. Aber (6, 1. S.) verhält ſich das Parallelogramm AG zu dem Parallelogramme GK wie die AE zu der EK, und das Parallelogramm GK zu dem Parallelogramme KL wie die GE zu

der

der EL, und das Parallelogramm QE zu dem Parallelogramme KM wie die HE zu der EM; folglich verhält ſich auch das Parallelogramm AG zum Parallelogramme GK wie das GK zu dem KL, und wie das EQ zu dem KM. Aber (11, 32. S.) verhält ſich das Parallelogramm AG zum Parallelogramme GK wie der Körper AB zum Körper EO, das Parallelogramm GK zum Parallelogramme KL wie der Körper EO zum Körper QL, und das Parallelogramm QE zum Parallelogramme KM wie der Körper QL zum Körper KP; folglich verhält ſich auch der Körper AB zum Körper EO wie der EO zu dem QL und der QL zu dem KP. Wenn aber vier Gröſſen ſtetig proportionirt ſind, ſo hat (5, 11. Erkl.) die erſte zur vierten ein dreymal höheres Verhältniſs, als die erſte zur zweyten; folglich hat auch der Körper AB zum Körper KP ein dreymal höheres Verhältniſs, als der Körper AB zum Körper EO. Aber (11, 32. S.) verhält ſich der Körper AB zum Körper EO wie das Parallelogramm AG zum Parallelogramme GK und (6, 1. S.) wie die Linie AE zu der EK; folglich hat auch der Körper AB zum Körper KP ein dreymal höheres Verhältniſs, als die Linie AE zu der EK. Es iſt aber der Körper KP dem Körper CD, und die Linie EK der CF gleich; folglich hat auch der Körper AB zum Körper CD ein dreymal höheres Verhältniſs, als ſeine homologe Seite AE zur homologen Seite CF, w. z. e. w.

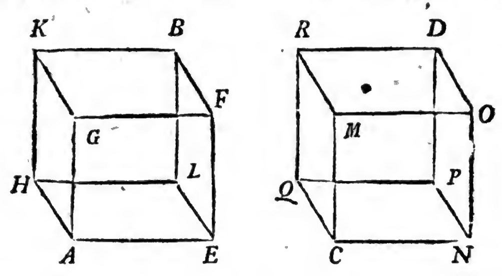
Zuſaz. Hieraus erhellet, daſs wenn vier gerade Linien proportionirt ſind, die erſte zur vierten ſich verhalte wie das Parallelepipedon über der erſten zu dem ihm ähnlichen und ähnlichliegenden Parallelepipedon über der zweyten, weil nämlich die erſte zur vierten ein dreymal höheres Verhältniſs hat, als zur zweyten.

34. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn zwey Parallelepipeda einander gleich ſind, ſo ſind ihre Grundflächen den

den Höhen umgekehrt proportionirt; und Parallelepipeda, deren Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt ſind, ſind einander gleich.

Es ſeyen die gleichen Parallelepipeda AB, CD, ſo behaupte ich, daſs ihre Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt ſeyen, das heiſst, daſs die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ ſich verhalte, wie die Höhe des Parallelepipedons CD zur Höhe des Parallelepipedons AB.

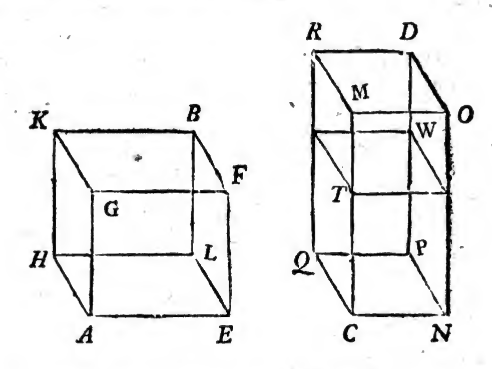


Beweis. Es ſeyen *zuerſt* die Seitenlinien AG, EF, LB, HK, CM, NO, PD, QR auf ihren Grundflächen lothrecht, ſo behaupte ich, daſs die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ ſich verhalte wie die Höhe CM zur Höhe AG.

Wenn die Grundfläche EH der Grundfläche NQ gleich iſt, ſo iſt, da auch das Parallelepipedon AB dem Parallelepipedon CD gleich iſt, auch die Höhe CM der Höhe AG gleich. Denn wenn die Grundflächen EH, NQ einander gleich und doch die Höhen AG, CM ungleich wären, ſo wäre (11, 31. S.) auch der Körper AB dem Körper CD nicht gleich. Es iſt aber angenommen, daſs er ihm gleich ſey; folglich iſt auch die Höhe CM der Höhe AG nicht ungleich, alſo gleich, und mithin verhält ſich die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ wie die Höhe CM zur Höhe AG, und es erhellet alſo, daſs die Grundflächen der Körper AB, CD den Höhen derſelben umgekehrt proportionirt ſeyen.

Aber

Aber die Grundfläche EH sey der Grundfläche NQ nicht gleich, sondern die EH sey grösser, so muss, da der Körper AB dem CD gleich ist, die CM grösser, als die AG, seyn. Denn wäre dies nicht, so wären wiederum (11, 31. S.) die Parallelepipeda AB, CD einander nicht gleich. Nach der Voraussezung aber sind sie einander gleich. Man seze also die CT der AG gleich, und

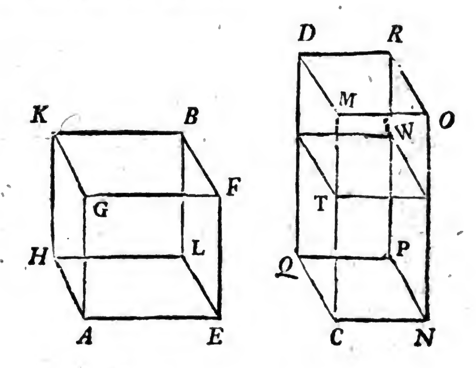


vollende das Parallelepipedon CW auf der Grundfläche NQ und von der Höhe CT. Da nun der Körper AB dem Körper CD gleich ist, CW aber ein anderer Körper ist, und (5, 7. S.) gleiche Grössen zu *einer* Grösse einerley Verhältniss haben, so verhält sich der Körper AB zum Körper CW wie der Körper CD zum Körper CW. Aber (11, 32. S.) verhält sich der Körper AB zum Körper CW wie die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ, denn die Höhen der Körper AB, CW sind einander gleich. Hingegen (11, 25. S.) verhält sich der Körper CD zum Körper CW wie die Grundfläche MQ zur Grundfläche QT, und (6, 1. S.) wie die Grundlinie MC zur Grundlinie CT; folglich verhält sich die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ wie die Linie MC zu der CT. Es ist aber die CT der AG gleich; folglich verhält sich die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ wie die Linie MC zur Linie AG. Demnach sind der Körper AB, CD Grundflächen ihren Höhen umgekehrt proportionirt.

Es

Es seyen nun *zweytens* die Grundflächen der Körper AB, CD ihren Höhen umgekehrt proportionirt, und es verhalte sich die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ wie die Höhe des Körpers CD zur Höhe des Körpers AB, so behaupte ich, dass der Körper AB dem Körper CD gleich sey.

Die Seitenlinien seyen wiederum auf den Grundflächen lothrecht. Wenn nun die Grundfläche EH der Grundfläche NQ gleich ist, so ist, da die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ sich verhält wie die Höhe des Körpers CD zur Höhe des Körpers AB, die Höhe des Körpers CD der Höhe des Körpers AB gleich. Aber Parallelepipeda auf gleichen Grundflächen und von einerley Höhe sind (11, 31. S.) einander gleich; folglich ist der Körper AB dem Körper CD gleich.

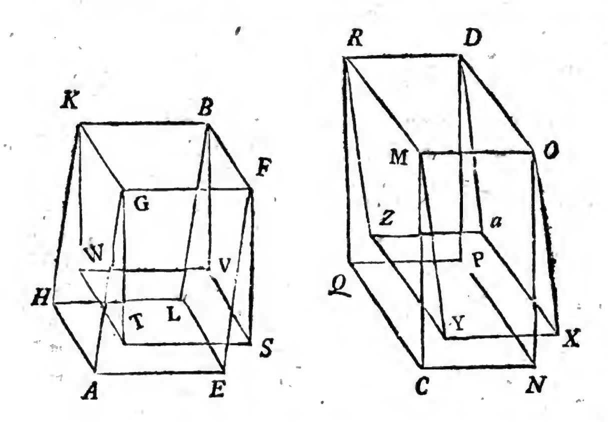


Es sey aber die Grundfläche EH der Grundfläche NQ nicht gleich, sondern die EH sey grösser, so ist auch die Höhe des Körpers CD grösser, als die Höhe des Körpers AB, das heisst, die CM grösser, als die AG. Man nehme wiederum der AG die CT gleich, und vollende, wie zuvor, den Körper CW. Da nun die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ sich verhält wie die CM zu der AG, die AG aber der CT gleich ist, so verhält sich die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ wie die MC zu der CT.

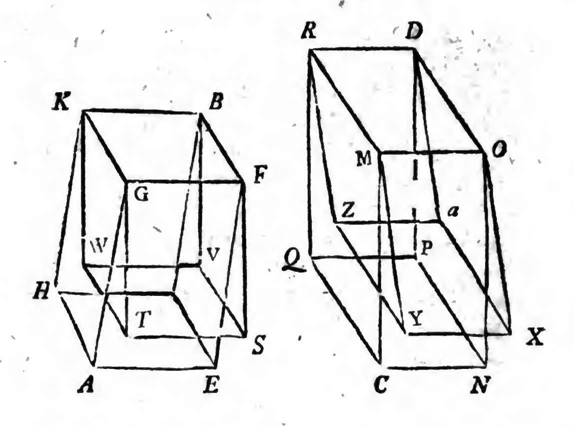
Aber

Aber (11, 32. S.) verhält sich die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ wie der Körper AB zum Körper CW, denn die Körper AB, CW sind gleich hoch. Wie sich aber die MC zu der CT verhält, so verhält sich (6, 1. S.) die Grundfläche MQ zur Grundfläche QT, und (11, 25. S.) der Körper CD zum Körper CW; folglich verhält sich auch der Körper AB zum Körper CW wie der Körper CD zum Körper CW. Die beyden Körper AB, CD haben also zu dem CW einerley Verhältnifs, und folglich ist (5, 9. S.) der Körper AB dem Körper CD gleich. w. z. e. w.

Es seyen aber *zweytens* die Seitenlinien FE, BL, GA, KH, ON, DP, MC, RQ auf ihren Grundflächen nicht lothrecht, so fälle man (11, 11. S.) von den Punkten F, G, B, K, O, M, D, R auf die Ebenen der Grundflächen



EH, NQ Lothe, welche den Ebenen in den Punkten S, T, V, W, X, Y, *a*, Z begegnen, und vollende die Körper FW, OZ, so behaupte ich, dafs auch dann, wenn die Körper AB, CD einander gleich sind, ihre Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt seyen, und die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ sich verhalte wie die Höhe des Körpers CD zur Höhe des Körpers AB.



Da der Körper AB dem Körper CD, dem Körper AB aber (11, 30. S.) der Körper BT gleich iſt, denn ſie ſind auf einerley Grundfläche FK, und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien endigen ſich nicht in einerley geraden Linien, da ferner auch der Körper DC dem Körper DY gleich iſt, denn ſie ſind auf einerley Grundfläche OR und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien endigen ſich nicht in einerley geraden Linien, ſo iſt auch der Körper BT dem Körper DY gleich. Wenn aber zwey Parallelepipeda einander gleich ſind, und ihre Höhen auf den Grundflächen lothrecht ſtehen, ſo ſind nach dem erſten Theile dieſes Beweiſes, die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt; es verhält ſich alſo die Grundfläche FK zur Grundfläche OR wie die Höhe des Körpers DY zur Höhe des Körpers BT. Und (11, 24. S.) iſt die Grundfläche FK der Grundfläche EH, die Grundfläche OR aber der Grundfläche NQ gleich; folglich verhält ſich die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ wie die Höhe des Körpers DY zur Höhe des Körpers BT. Die Körper DY, BT aber haben mit den Körpern DC, BA einerley Höhe; folglich verhält ſich die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ wie die Höhe des Körpers DC zur Höhe des Körpers BA. Demnach ſind die Grundflächen der Körper AB, DC ihren Höhen umgekehrt proportionirt.

Es

Es seyen nun aber die Grundflächen der Körper AB, CD den Höhen umgekehrt proportionirt, und es verhalte sich die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ wie die Höhe des Körperh CD zur Höhe des Körpers AB so behaupte ich, dass der Körper AB dem Körper CD gleich sey.

Da, nach der vorigen Construction, die Grundfläche EH zur Grundfläche NQ sich verhält wie die Höhe des Körpers CD zur Höhe des Körpers AB, die Grundfläche EH aber der FK, und die NQ der OR gleich ist, so verhält sich auch die Grundfläche FK zur Grundfläche OR wie die Höhe des Körpers CD zur Höhe des Körpers AB. Die Körper AB, CD aber haben mit den Körpern BT, DY einerley Höhen, es verhält sich also die Grundfläche FK zur Grundfläche OR wie die Höhe des Körpers DY zur Höhe des Körpers BT. Demnach sind die Grundflächen der Körper BT, DY ihren Höhen umgekehrt proportionirt. Nach dem ersten Theile dieses Beweises aber sind Parallelepipeda, deren Höhen auf den Grundflächen lothrecht stehen, und deren Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt sind, einander gleich; folglich ist der Körper BT dem Körper DY gleich. Aber (11, 30. S.) ist dem Körper BT der Körper BA gleich, denn sie sind auf einerley Grundfläche FK, und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien endigen sich nicht in einerley geraden Linien, und dem Körper DY ist der Körper DC gleich, denn sie sind auf einerley Grundfläche OR, und von einerley Höhe, und ihre Seitenlinien endigen sich nicht in einerley geraden Linien; folglich ist auch der Körper AB dem Körper CD gleich, w. z. e. w.

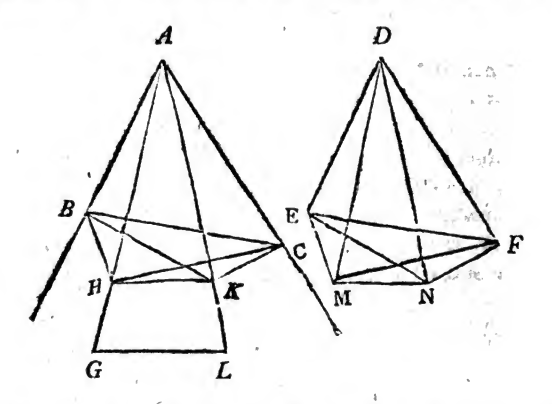
35. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn man zwey ebene Winkel hat, und in ihren Scheitelpunkten gerade Linien aufstellt, die mit den zuerst gesezten Linien Winkel machen, die einander stück-

 weise

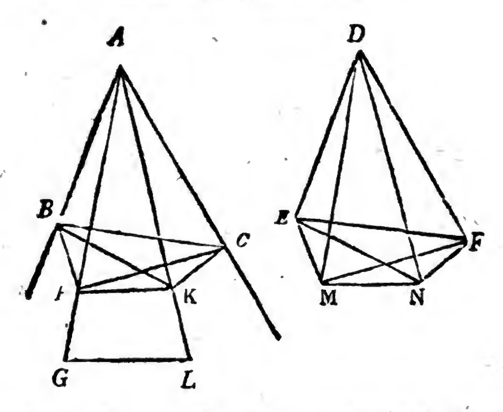
weiſe gleich ſind, in den aufgeſtellten Linien aber willkührliche Punkte annimmt, und von dieſen auf die Ebenen, in welchen die zuerſt angenommenen Winkel liegen, Lothe fällt, von den Punkten aber, in welchen dieſe Lothe die Ebenen treffen, nach den zuerſt angenommenen Winkeln gerade Linien zieht, ſo ſchlieſſen dieſe mit den aufgeſtellten Linien gleiche Winkel ein.

Es ſeyen die zwey geradlinigen Winkel BAC, EDF, und in den Punkten A, D ſtelle man die Linien AG, DM auf, die mit den Anfangs geſezten geraden Linien Winkel machen, die einander ſtückweiſe gleich ſeyen, nämlich den Winkel MDE, der dem Winkel GAB, und den Winkel MDF, der dem Winkel GAC gleich ſey, hierauf nehme man in den Linien AG, DM nach Belieben die Punkte G, M an, und fälle von dieſen auf die Ebenen durch BAC, EDF die Lothe GL, MN, die den Ebenen in den Punkten L, N begegnen, und ziehe die LA, ND, ſo behaupte ich, daſs der Winkel GAL dem Winkel MDN gleich ſey.



Beweis. Man mache der DM die AH gleich, und ziehe durch H der GL die HK parallel. Es iſt aber die GL auf der Ebene durch BAC lothrecht, folglich iſt (11, 8. S.)

8. S.) auch die HK auf der Ebene durch BAC lothrecht. Man fälle von den Punkten K, N auf die Linien AB, AC, DF, DE die Lothe KB, KC, NF, NE und ziehe die HC, CB, MF, FE. Da nun (1, 47. S.) das Quadrat von AH den Quadraten von KA, HK gleich ist, dem Quadrate von KA, aber die Quadrate von KC, CA gleich sind, so ist das Quadrat von HA den Quadraten von HK, KC, CA gleich. Aber den Quadraten von KH, KC ist das Quadrat von HC gleich; folglich ist das Quadrat von HA den Quadraten von HC, CA gleich, und mithin der Winkel HCA ein rechter. Aus eben den Gründen aber ist auch der Winkel DFM ein rechter; folglich ist der Winkel HCA dem Winkel DFM gleich. Es ist aber auch der Winkel HAC dem Winkel MDF gleich; folglich sind MDF, HAC zwey Dreyecke, in welchen zwey und zwey Winkel einander stückweise gleich sind, und eine Seite des einen einer Seite des andern gleich ist, und zwar die, welche einem der gleichen Winkel gegenüberliegt, die AH nämlich der DM; folglich sind (1, 26. S.) auch die übrigen Seiten einander stückweise gleich, die AC also ist der DF gleich. Auf gleiche Art kann nun gezeigt werden, daſs auch die AB der DE gleich sey. Man ziehe die HB, ME. Da nun das Quadrat von AH den Quadraten von AK, KH gleich ist, dem Quadrate von AK aber die Quadrate von AB, BK gleich sind, so sind die Quadrate von AB, BK, KH dem Quadrate von AH gleich. Aber den Quadraten von BK, KH ist das Quadrat von BH gleich, denn der Winkel HKB ist ein rechter, weil die HK auf der angenommenen Ebene lothrecht ist; das Quadrat von AH also ist den Quadraten von AB, BH gleich; folglich ist der Winkel HBA ein rechter. Aus ähnlichen Gründen ist auch der Winkel DEM ein rechter. Nach der Voraussezung aber ist der Winkel BAH dem Winkel EDM gleich; nun ist aber auch die AH der DM gleich; folglich ist auch die AB der DE gleich. Da nun die AC der DF, die AB aber der DE gleich ist, und mithin die beyden CA, AB den beyden FD, DE gleich sind, aber auch der Winkel CAB dem Winkel FDE gleich



gleich iſt, ſo iſt (1, 4. S.) die Grundlinie BC der Grundlinie EF gleich, die beyden Dreyecke ſind einander gleich, und die übrigen Winkel in beyden ſind einander ſtückweiſe gleich. Der Winkel ACB alſo iſt dem Winkel DFE gleich. Es iſt aber, nach der Conſtruction, der rechte Winkel ACK dem rechten Winkel DFN, folglich auch der übrige Winkel BCK dem übrigen Winkel EFN gleich. Aus ähnlichen Gründen iſt auch der Winkel CBK dem Winkel FEN gleich. Demnach ſind BCK, EFN zwey Dreyecke, in welchen zwey und zwey Winkel einander ſtückweiſe gleich ſind, und eine Seite des einen einer Seite des andern gleich iſt, diejenige nämlich, welche an den gleichen Winkeln liegt, das heiſst die BC der EF; folglich ſind (1, 26. S.) auch die übrigen Seiten in beyden einander ſtückweiſe gleich; die CK alſo iſt der FN gleich. Es iſt aber auch die AC der DF gleich, mithin ſind die beyden AC, CK den beyden DF, FN gleich, und ſchlieſſen rechte Winkel ein, folglich iſt (1, 4. S.) die Grundlinie AK der Grundlinie DN gleich. Da nun auch die AH der DM gleich iſt, ſo iſt auch das Quadrat von AH dem Quadrate von DM gleich. Aber (1, 47. S.) ſind dem Quadrate von AH die Quadrate von AK, KH gleich, denn der Winhel AKH iſt ein rechter, dem Quadrate von DM aber ſind die Quadrate von DN, NM gleich, weil der Winkel DNM ein rechter iſt; folglich ſind die Quadrate von

von AK, KH den Quadraten von DN, NM gleich. Unter diesen ist aber das Quadrat von AK dem Quadrate von DN gleich; folglich ist auch der Rest, das Quadrat von KH, dem andern Reste, dem Quadrate von NM, mithin die HK der NM selbst gleich. Da nun die beyden HA, AK den beyden MD, DN stückweise gleich sind, und von der Grundlinie HK gezeigt worden ist, dass sie der Grundlinie NM gleich sey, so ist (1, 8. S.) auch der Winkel HAK dem Winkel MDN gleich, w. z. e. w.

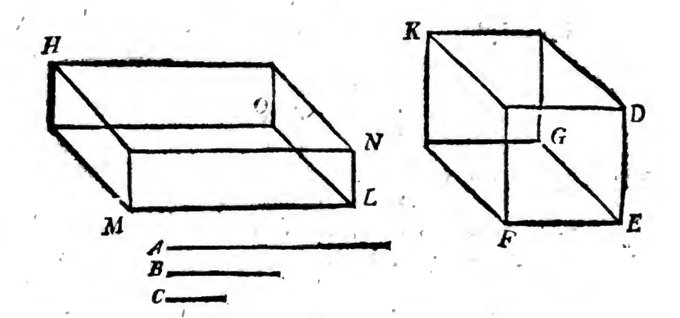
Zusaz. Hieraus erhellet, dass wenn man zwey gleiche ebene geradlinige Winkel hat, und auf denselben gleiche gerade Linien aufstellt, die mit den zuerst gesezten geraden Linien Winkel machen, welche einander stückweise gleich sind, die Lothe, die von ihnen nach den Ebenen, in welchen die zuerst angenommenen Winkel liegen, gefällt werden, einander gleich seyen.

36. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn drey gerade Linien proportionirt sind, so ist das aus denselben errichtete Parallelepipedon dem aus der mittleren errichteten gleichseitigen und mit dem erstern gleichwinkeligen gleich.

Es seyen die drey gerade Linien A, B, C proportionirt und es verhalte sich die A zu der B wie die B zu der C, so behaupte ich, dass das aus den drey Linien A, B, C errichtete Parallelepipedon dem aus der B errichteten gleichseitigen und mit dem erstern gleichwinkeligen gleich sey.

Beweis. Es sey an E ein körperlicher Winkel, von den drey ebenen Winkeln DEG, GEF, FED eingeschlossen; man mache der B jede der Linien DE, GE, EF gleich, und vollende das Parallelepipedon EK, hierauf mache man der A die LM gleich, und seze (11, 26. S.) an den Punkt L der Linie LM einen körperlichen Winkel, der



der dem bey E gleich ſey, und von den Winkeln NLO, OLM, MLN eingeſchloſſen werde. Endlich mache man der B die LO, der C die LN gleich.

Da nun die A zu der B ſich verhält wie die B zu der C, die A aber der LM, und die B einer jeden der Linien LO, EF, EG, ED, die C endlich der LN gleich iſt, ſo verhält ſich die LM zu der EF wie die DE zu der LN, auch ſind die um die gleichen Winkel MLN, DEF liegenden Seiten umgekehrt proportionirt; folglich iſt (6, 14. S.) das Parallelogramm MN dem Parallelogramme DF gleich. Und da die zwey ebenen geradlinigen Winkel DEF, NLM gleich, und auf ihnen die geraden Linien LO, EG aufgeſtellt ſind, die einander ſelbſt gleich ſind, und mit den Anfangs geſezten Linien Winkel einſchlieſſen, die einander ſtückweiſe gleich ſind, ſo ſind (11, 35. Zuſ.) die Lothe, die von den Punkten G, O auf die Ebenen durch NLM, DEF gefällt werden, einander gleich, und mithin die Körper LH, EK von gleicher Höhe. Parallelepipeda aber auf gleichen Grundflächen und von einerley Höhe ſind (11, 31. S.) einander gleich; folglich iſt der Körper HL dem Körper EK gleich. Es iſt aber HL der von den dreyen A, B, C, und EK der von der Linie B errichtete Körper; und mithin iſt der von den dreyen A, B, C errichtete Körper dem von der B errichteten gleichſeitigen und mit dem vorgenannten gleichwinkeligen gleich.

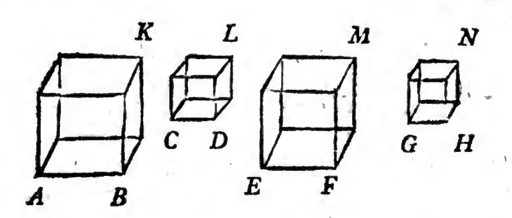
Wenn

Wenn demnach drey gerade Linien proportionirt sind u. s. w. w. z. e. w.

37. *Saz.*

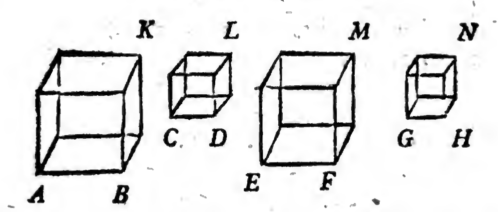
Lehrsaz. Wenn vier gerade Linien proportionirt sind, so sind auch die von denselben beschriebenen ähnlichen und ähnlichliegenden Parallelepipeda proportionirt; und wenn die von vier geraden Linien beschriebenen ähnlichen und ähnlichliegenden Parallelepipeda proportionirt sind, so sind auch die geraden Linien proportionirt.

Es seyen die vier geraden Linien AB, CD, EF, GH proportionirt, so dass die AB zu der CD sich verhalte wie die EF zu der GH, und man beschreibe von den Linien AB, CD, EF, GH die ähnlichen und ähnlichliegenden Parallelepipeda KA, LC, ME, NG, so behaupte ich, dass der Körper KA zu dem LC sich verhalte wie der ME zu dem NG.



Beweis. Da das Parallelepipedon KA dem LC ähnlich ist, so hat (11, 33. S.) die KA zu dem LC ein dreymal höheres Verhältniss, als die AB zu der CD. Aus eben den Gründen hat auch der Körper ME zu dem NG ein dreymal höheres Verhältniss, als die EF zu der GH. Nach der Voraussezung aber verhält sich die AB zu der

CD



CD wie die EF zu der GH; folglich verhält ſich die Figur AK zu der LC wie die ME zu der NG.

Es verhalte ſich nun der Körper AK zu dem LC wie der ME zu dem NG, ſo behaupte ich, daſs die Linie AB zu der CD ſich verhalte wie die EF zu der GH.

Da wiederum der Körper AK zu dem LC ein dreymal höheres Verhältniſs hat, als die AB zu der CD, der Körper ME aber zu dem NG ein dreymal höheres Verhältniſs hat, als die EF zu der HG, und da der Körper AK zu dem Körper LC ſich verhält wie der Körper ME zu dem Körper NG; ſo verhält ſich auch die AB zu der CD wie die EF zu der GH.

Wenn demnach vier gerade Linien proportionirt ſind, u. ſ. w. w. z. e. w.

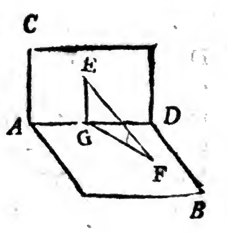
38. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn eine Ebene auf einer andern lothrecht ſteht, und von einem Punkte der erſten auf die lezte ein Loth gefällt wird, ſo fällt dieſes in den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt beyder Ebenen.

Es ſey die Ebene CD auf der Ebene AB lothrecht, der gemeinſchaftliche Durchſchnitt beyder ſey AD, und man nehme in der Ebene CD nach Belieben einen Punkt E an, ſo behaupte ich, daſs das Loth, das von dem Punkte E nach der Ebene AB gefällt wird, in die Linie AD falle.

Be-

Beweis. Gesezt, dies wäre nicht, sondern es fiele, die Möglichkeit angenommen, ausserhalb derselben, wie die EF, und begegnete der Ebene AB in dem Punkte F, so fälle man von dem Punkte F (1, 10. S.) auf die DA in der Ebene AB das Loth FG welches (11, 4. Erkl.) auch auf der Ebene CD lothrecht seyn wird, hierauf ziehe man die EG.



Da die FG auf der Ebene CD lothrecht ist, die EG aber, die mit ihr in der nämlichen Ebene liegt, sie berührt, so ist (11, 3. Erkl.) der Winkel FGE ein rechter. Aber auch die EF ist auf der Ebene AB lothrecht, folglich ist der Winkel EFG ein rechter, und mithin sind in dem Dreyecke EFG zwey Winkel zwey rechten gleich, was (1, 17. S.) ungereimt ist; folglich fällt das von dem Punkte E auf die Ebene AB gefällte Loth nicht ausserhalb der Linie DA; es fällt also in die DA.

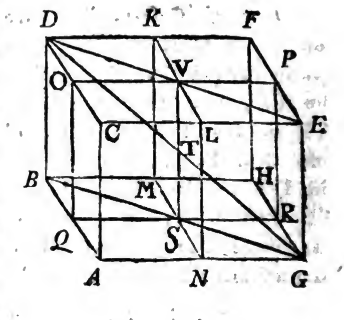
Wenn demnach eine Ebene auf einer andern lothrecht ist, u. s. w. w. z. e. w.

39. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn man die Seiten der gegenüberliegenden Seitenflächen eines Parallelepipedons halbirt, und durch die Durchschnittspunkte Ebenen legt, so halbiren der gemeinschaftliche Durchschnitt dieser Ebenen und des Parallelepipedons Diagonale einander.

Man halbire die Seiten der gegenüberliegenden Seitenflächen CF, AH des Parallelepipedons AF in den Punkten K, L, M, N, O, P, Q, R, und lege durch diese Durchschnittspunkte die Ebenen KN, OR, der gemeinschaftliche Durchschnitt dieser Ebenen sey VS, und des Parallelepipedons Diagonale DG, so behaupte ich, dass die VS, DG einander halbiren, das heisst, dass die VT der TS, und die DT der TG gleich sey.

Be-



Beweis. Man ziehe die DV, VE, BS, SG. Da nun die DO der PE parallel ist, so sind (1, 29. S.) die Wechselwinkel DOV, VPE einander gleich, und da die DO der PE, die OV aber der VP gleich ist, und beyde gleiche Winkel einschliessen, so ist (1, 4. S.) die Grundlinie DV der Grundlinie VE, und das Dreyeck DOV dem Dreyecke VPE gleich, auch sind in beyden die übrigen Winkel einander gleich, der Winkel OVD ist also dem Winkel PVE gleich, und deswegen (1, 14. S.) die DVE eine gerade Linie. Aus gleichen Gründen ist auch die BSG eine gerade Linie, und die BS der SG gleich. Da nun (1. 34. S.) die CA der DB sowohl, als der EG gleich und parallel ist, so ist auch die DB der EG gleich und (1, 30. S.) parallel, und diese beyden werden von den Linien DE, BG verbunden, folglich ist, (1, 33. S.) auch die DE der BG gleich und parallel, auch hat man auf jeder von beyden nach Belieben die Punkte D, V, G, S angenommen, und die Linien DG, VS gezogen; folglich sind (11, 7. S.) die DG, VS in *einer* Ebene. Da nun die DE der BG parallel ist, so ist (1, 29. S.) auch der Winkel EDT dem Winkel BGT gleich, denn sie sind Wechselwinkel. Es ist aber auch (1, 15. S.) der Winkel DTV dem Winkel GTS gleich; man hat also hier zwey Dreyecke DTV, GTS, in welchen zwey und zwey Winkel einander stückweise gleich sind, und eine Seite des einen einer Seite des andern gleich ist, die einem der gleichen Winkel gegenüberliegt, die DV nämlich der GS, denn sie sind die Hälften der DE, BG; folglich sind (1, 26. S.) auch die übrigen Seiten beyder einander stückweise gleich, die DT also ist der TG, und die VT der TS gleich.

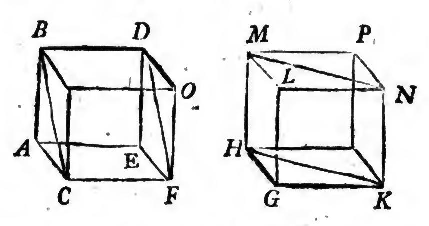
Wenn demnach in einem Parallelepipedon u. s. w. w. z. e. w.

40. *Saz.*

40. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey Prismen gleich hoch sind, und das eine von ihnen ein Parallelogramm, das andere aber ein Dreyeck zur Grundfläche hat, und das Parallelogramm das Doppelte des Dreyecks ist, so sind die Prismen einander gleich.

Es seyen die gleich hohen Prismen ABCDEF, GHKLMN, und das eine von ihnen habe zur Grundfläche das Parallelogramm AF, das andere aber das Dreyeck GHK, und das Parallelogramm AF sey das Doppelte des Dreyecks GHK, so behaupte ich, dass das Prisma ABCDEF dem Prisma GHKLMN gleich sey.



Beweis. Man vollende die Körper AO, GP. Da nun das Parallelogramm AF das Doppelte des Dreyecks GHK ist, aber auch (1, 34. S.) das Parallelogramm HK das Doppelte des Dreyecks GHK ist, so ist das Parallelogramm AF dem Parallelogramme HK gleich. Nun sind aber Parallelepipeda auf gleichen Grundflächen und von einerley Höhe (11, 31. S.) einander gleich; folglich ist der Körper AO dem Körper GP gleich, auch ist von dem Körper AO das Prisma ABCDEF, und von dem Körper GP das Prisma GHKLMN die Hälfte; folglich ist das Prisma ABCDEF dem Prisma GHKLMN gleich.

Wenn demnach zwey Prismen gleich hoch sind, u. s. w. w. z. e. w.

Euklids

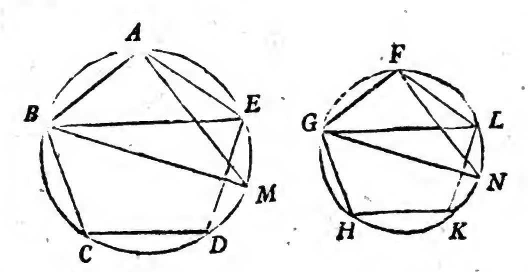
EUKLIDS ELEMENTE.

ZWOELFTES BUCH.

1. Saz.

Lehrsaz. Aehnliche Polygone, die in Kreise einbeschrieben sind, verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser.

Es seyen die Kreise ABCDE, FGHKL, und in denselben die ähnlichen Polygone ABCDE, FGHKL, die Durchmesser der Kreise seyen BM, GN, so behaupte ich, dass das Quadrat von BM zu dem Quadrate von GN sich verhalte wie das Polygon ABCDE zu dem Polygone FGHKL.



Beweis. Man ziehe die Linien BE AM, GL, FN. Da nun das Polygon ABCDE dem Polygone FGHKL ähn-

ähnlich ist, so ist (6, 1. Erkl.) der Winkel BAE dem Winkel GFL gleich, und es verhält sich die BA zu der AE wie die GF zu der FL. Demnach sind BAE, GFL zwey Dreyecke, die einen gleichen Winkel haben, nämlich den Winkel BAE dem Winkel GFL, und worin die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt sind; folglich ist (11, 29. S.) das Dreyeck ABE dem Dreyecke FLG gleichwinkelig, und mithin der Winkel AEB dem Winkel FLG gleich. Aber (3, 21. S.) ist der Winkel AEB dem Winkel AMB gleich, denn sie sind auf einerley Bogen, der Winkel FLG aber ist dem Winkel FNG gleich; folglich ist auch der Winkel AMB dem Winkel FNG gleich. Es ist aber auch (3, 31. S.) der rechte Winkel BAM dem rechten Winkel GFN gleich, folglich ist auch der übrige Winkel dem übrigen gleich, und mithin das Dreyeck ABM dem Dreyecke FGN gleichwinkelig; folglich verhält sich (6, 4. S.) die BM zu der GN wie die BA zu der GF. Aber (6, 20. S.) ist das Verhältniss des Quadrats von BM zu dem Quadrate von GN das zweymal höhere von dem Verhältnisse der BM zu der GN, und das Verhältniss des Polygons ABCDE zu dem Polygone FGHKL ist das zweymal höhere von dem Verhältnisse der BA zu der GF; folglich verhält sich auch (5, 11. S.) das Quadrat von BM zu dem Quadrate von GN wie das Polygon ABCDE zu dem Polygone FGHKL.

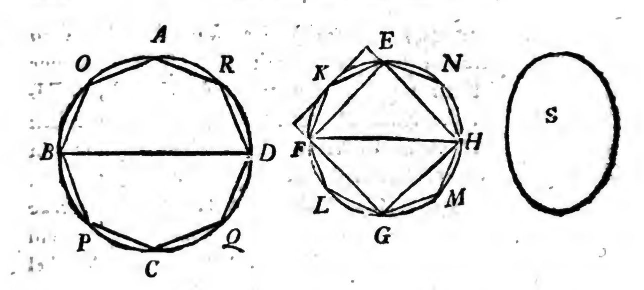
Demnach verhalten sich ähnliche Polygone u. s. w. w. z. e. w.

2. *Saz.*

Lehrsaz. Kreise verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

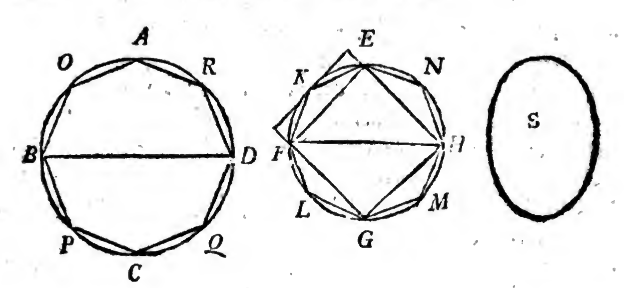
Es seyen die Kreise ABCD, EFGH ihre Durchmesser seyen BD, FH, so behaupte ich, dass das Quadrat von BD zu dem Quadrate von FH sich verhalte wie der Kreis ABCD zu dem Kreise EFGH.

Be-



Beweis. Wäre dies nicht, so verhielte sich das Quadrat von BD zu dem Quadrate von FH wie der Kreis ABCD zu einem Raume, der entweder kleiner, oder grösser, als der Kreis EFGH, wäre. Er sey *zuerst* kleiner, und heisse S. In dem Kreise EFGH beschreibe man das Quadrat EFGH. Nun ist das in den Kreis beschriebene Quadrat grösser, als die Hälfte des Kreises EFGH, weil, wenn man durch die Punkte E, F, G, H die Berührungslinien zieht, (1, 47. S. u. 3, 31. S.) das Quadrat EFGH die Hälfte des um den Kreis beschriebenen Quadrats ist. Der Kreis aber ist kleiner, als das um ihn beschriebene Quadrat, folglich ist das Quadrat EFGH grösser, als die Hälfte des Kreises EFGH. Man halbire die Bogen EF, FG, GH, HE in den Punkten K, L, M, N, und ziehe die EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE, so ist jedes der Dreyecke EKF, FLG, HMG, HNE grösser, als der halbe Kreisabschnitt, in welchem es liegt. Wenn man nämlich durch die Punkte K, L, M, N die Berührungslinien des Kreises ziehet, und die Parallelogramme über den Linien EF, FG, GH, HE, vollendet, so ist (1, 41. S.) jedes der Dreyecke EKF. FLG, GMH, HNE die Hälfte des zu ihm gehörigen Parallelogramms. Aber der Abschnitt ist kleiner, als das Parallelogramm; folglich ist jedes der Dreyecke EKF, FLG, GMH, HNE grösser, als der halbe Kreisabschnitt, in welchem es liegt. Halbirt man also die übrigbleibenden Bogen aufs neue, und zieht die geraden Linien, und sezt dies so fort, so wird man zulezt Kreisabschnitte übrig behalten, welche kleiner seyn wer-

werden, als der Ueberschufs, um welchen der *Kreis* EFGH den Raum S übertrifft. Denn es ist im nachstehenden Lehnsaze gezeigt, dafs wenn man zwey ungleiche Gröſsen hat, und von der gröſseren mehr als die Hälfte, und vom Reste wieder mehr, als die Hälfte, wegnimmt, und das immer so fortsezt, zulezt eine Gröſse übrig bleibe, die kleiner ist, als die kleinere der Anfangs gesezten Gröſsen. Es seyen also die Abschnitte des *Kreises* EFGH auf den Linien E*K*, *K*F, FL, LG, GM, MH, HN, NE übrig geblieben, welche kleiner seyen als der Ueberschufs, um welchen der *Kreis* EFGH den Raum S übertrifft, so ist folglich das übrige Polygon E*K*FLGMHN gröſser, als der Raum S. Man beschreibe nun auch in dem *Kreise* ABCD ein dem Polygone E*K*FLGMHN ähnliches Polygon AOBPCQDR, so verhält sich (12, 1. S.) das Quadrat von BD zu dem Quadrate von FH wie das Polygon AOBPCQDR zu dem Polygone E*K*FLGMHN. Aber, nach der Vorausſezung verhält sich das Quadrat von BD zu dem Quadrate von FH wie der *Kreis* ABCD zu dem Raume S; folglich verhält sich auch der *Kreis* ABCD zu dem Raume S wie das Polygon AOBPCQDR zu dem Polygone E*K*FLGMHN, und *verwehſelt*, der *Kreis* ABCD zu dem darein beschriebenen Polygone wie der Raum S zu dem Polygone E*K*FLGMHN. Es ist aber der *Kreis* ABCD gröſser, als das darein beschriebene Polygon; folglich ist auch der Raum S gröſser, als das Polygon E*K*FLGMHN. Aber nach der Vorausſezung ist er auch kleiner, welches unmöglich ist. Es verhält sich also nicht das Quadrat von BD zu dem Quadrate von FH wie der *Kreis* ABCD zu einem Raume, der kleiner ist, als der *Kreis* EFGH. Auf ähnliche Art kann nun gezeigt werden, dafs auch das Quadrat von FH zu dem Quadrate von BD sich nicht so verhalte, wie der *Kreis* EFGH zu einem Raume, der kleiner ist, als der *Kreis* ABCD. Ich behaupte aber, dafs auch das Quadrat von BD zu dem Quadrate von FH sich nicht so verhalte, wie der *Kreis* ABCD zu einem Raume, der gröſser ist, als der *Kreis* EFGH. Gesezt, dies wäre möglich, so sey dieser gröſsere



Raum S, und es verhält ſich *umgekehrt* das Quadrat von FH zu dem Quadrate von BD wie der Raum S zu dem Kreiſe ABCD. Aber der Raum S verhält ſich, wie nachher gezeigt werden ſoll, zum Kreiſe ABCD wie der Kreis EFGH zu einem Raume, der kleiner iſt, als der Kreis ABCD, folglich verhält ſich auch das Quadrat von FH zu dem Quadrate von BD wie der Kreis EFGH zu einem Raume, der kleiner iſt, als der Kreis ABCD, wovon gezeigt worden iſt, daſs es unmöglich ſey; folglich verhält ſich das Quadrat von BD zu dem Quadrate von FH nicht ſo, wie der Kreis ABCD zu einem Raume, der gröſſer iſt, als der Kreis EFGH. Es iſt aber gezeigt worden, daſs dieſer Raum auch nicht kleiner ſeyn könne. Folglich verhält ſich das Quadrat von BD zu dem Quadrate von FH wie der Kreis ABCD zu dem Kreiſe EFGH.

Demnach verhalten ſich Kreiſe wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer w. z. e. w.

Lehnſaz. 1. Wenn man zwey ungleiche Gröſſen hat, und von der gröſſeren mehr, als die Hälfte, und vom Reſte wieder mehr, als die Hälfte, wegnimmt, und dies immer ſo fortſezt, ſo bleibt zulezt eine Gröſſe übrig, die kleiner iſt, als die kleinere der Anfangs geſezten Gröſſen.

Es

Es seyen zwey ungleiche Grössen AB, C, und die grössere von ihnen sey AB, so behaupte ich, dass, wenn man von der AB mehr, als die Hälfte, und vom Reste wieder mehr, als die Hälfte, wegnimmt, und dies immer so fortsezt, zulezt eine Grösse übrig bleibe, die kleiner sey, als die Grösse C.

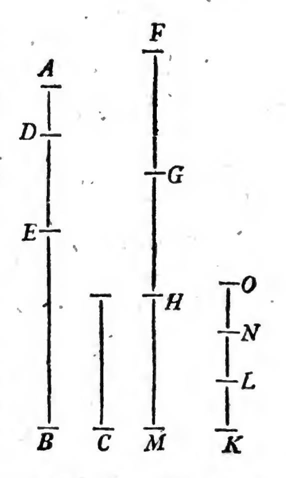
Beweis. Die Grösse C wird, vervielfältigt, einmal grösser werden, als die Grösse AB. Man vervielfältige sie also, und es sey DE ein Vielfaches der C, was grösser sey, als die AB; man theile die DE in die der C gleichen Theile DF, FG, GE, nnd nehme von der AB mehr, als die Hälfte, BH, von der AH aber wieder mehr, als die Hälfte, H*K* weg, und seze dies immer so fort, bis die Zahl der Theile in der AB der Zahl der Theile in der DE gleich wird. Es seyen also die Abtheilungen A*K*, *K*H, HB den Abtheilungen DF, FG, GE der Zahl nach gleich.

Da nun die DE grösser, als die AB, ist, und man von der DE weniger, als die Hälfte, die EG, von der AB aber mehr, als die Hälfte, die BH, weggenommen hat, so ist der Rest GD grösser, als der Rest HA. Ferner, da die GD grösser, als die HA ist, und man von der GD die Hälfte GF, von der HA aber mehr, als die Hälfte, die H*K*, weggenommen hat, so ist der Rest DF grösser, als der Rest A*K*. Die DF aber ist der C gleich, folglich ist auch die C grösser, als die AK, und mithin die A*K* kleiner, als die C. Demnach ist von der Grösse AB die Grösse A*K* übrig geblieben, welche kleiner ist, als die Anfangs gesezte kleinere Grösse C, w. z. e. w.

Eben so kann der Beweis geführt werden, wenn man jedesmal die Hälfte wegnimmt.

Anderer Beweis.

Es seyen zwey ungleiche Grössen AB, C, und es sey C die kleinere. Da die C die kleinere ist, so wird sie, vervielfältiget, einmal grösser werden, als die Grösse AB. Dies werde sie, wie die FM, so theile man sie in die der C gleichen Theile MH, HG, GF. Hierauf nehme man von der AB mehr, als die Hälfte, BE, und von der EA mehr, als die Hälfte, ED, weg, und seze dies immer so fort, bis die Zahl der Theile in AB der Zahl der Theile in FM gleich wird. Dies geschehe bey den Theilen BE, ED, DA von der AB. Nun mache man noch der DA jede der Grössen *K*L, LN, NO gleich, und seze dies so lange fort, bis die Abtheilungen der *K*O den Abtheilungen der FM der Zahl nach gleich werden.



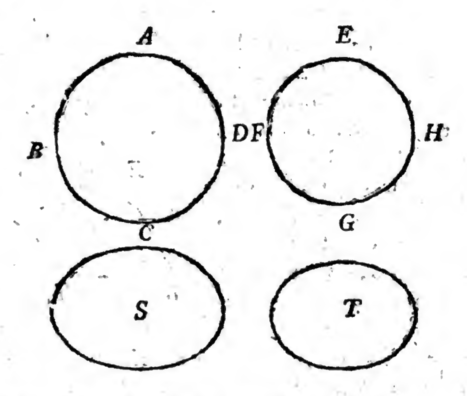
Da nun die BE grösser, als die Hälfte von AB, ist, so ist die BE grösser, als die EA, folglich noch vielmehr grösser, als die DA. Der DA aber ist die ON gleich; folglich ist die BE grösser, als die ON. Ferner, da die ED grösser, als die Hälfte von EA ist, so ist sie grösser, als die DA. Der DA aber ist die NL gleich; folglich ist die ED grösser, als die NL, und mithin das Ganze DB grösser, als das Ganze OL. Die DA aber ist auch der L*K* gleich; folglich ist das Ganze AB grösser, als das Ganze O*K*. Nun ist die MF grösser, als die BA; folglich ist noch vielmehr die MF grösser, als die O*K*. Da nun die ON, NL, L*K*, so wie die MH, HG, GF einander stückweise gleich sind, und die Zahl der Theile in MF der Zahl der Theile in O*K* gleich ist, so verhält sich die *K*L zu der FG wie die

O*K*

OK zu der FM, Es ist aber die FM grösser, als die OK; folglich ist auch die FG grösser, als die LK. Es ist aber die FG der C und die KL der AD gleich; folglich ist die C grösser, als die AD; w. z. e. w.

Lehnsaz. 2. Ich behaupte ferner, wenn der Raum S grösser ist, als der Kreis EFGH, so verhalte sich der Raum S zu dem Kreise ABCD wie der Kreis EFGH zu einem Raume, der kleiner ist, als der Kreis ABCD.

Man mache, dass der Raum S zum Kreise ABCD sich verhält, wie der Kreis EFGH zu dem Raume T, so behaupte ich, dass der Raum T kleiner sey, als der Kreis ABCD.



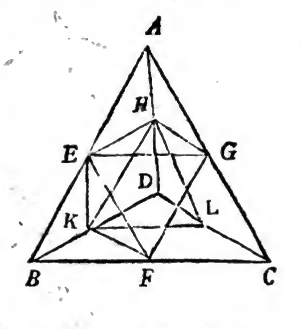
Beweis. Da der Raum S zum Kreise ABCD sich verhält, wie der Kreis EFGH zum Raume T, so verhält sich auch *verwechselt* (5, 16. S.) der Raum S zum Kreise EFGH wie der Kreis ABCD zum Raume T. Es ist aber nach der Voraussezung der Raum S grösser, als der Kreis EFGH; folglich ist auch der Kreis ABCD grösser, als der Raum T, und mithin verhält sich der Raum S zum Kreise ABCD wie der Kreis EFGH zu einem Raume, der kleiner ist, als der Kreis ABCD.

3. *Saz*,

3. *Saz.*

Lehrsaz. Jede dreyseitige Pyramide läßt sich in zwey gleiche, einander selbst sowohl, als der ganzen, ähnliche dreyseitige Pyramiden und in zwey gleiche Prismen theilen, welche grösser sind, als die Hälfte der ganzen Pyramide.

Es sey eine Pyramide, die zur Grundfläche das Dreyeck ABC und zur Spize den Punkt D habe, so behaupte ich, die Pyramide ABCD lasse sich in zwey gleiche einander selbst sowohl, als der ganzen, ähnliche dreyseitige Pyramiden und in zwey gleiche Prismen theilen, welche leztere grösser, als die Hälfte der ganzen Pyramide, seyen.

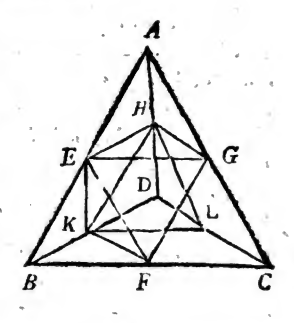


Beweis. Man halbire die Linien AB, BC, CA, AD, DB, DC in den Punkten E, F, G, H, K, L, und ziehe die Linien EH, EG, GH, H*K*, *K*L, LH, E*K*, *K*F, FG. Da nun die AE der EB, die AH aber der HD gleich ist, so ist (6, 2. S.) die EH der DB parallel. Aus gleichem Grunde ist auch die H*K* der AB parallel, folglich HEB*K* ein Parallelogramm und mithin (1, 34. S.) die HK der EB gleich. Aber die EB ist der AE gleich; folglich ist auch die AE der H*K* gleich Es ist aber auch die AH der HD gleich. Demnach sind die beyden AE, AH den beyden *K*H, HD stückweise gleich, und (1, 20. S.) ist der Winkel EAH dem Winkel *K*HD gleich; folglich ist (1, 4. S.) die Grundlinie EH der Grundlinie *K*D gleich, uud mithin das Dreyeck AEH dem Dreyecke H*K*D gleich nnd ähnlich. Aus eben den Gründen ist auch das Dreyeck AHG dem Dreyecke HLD gleich und ähnlich. Und da die zwey ein-

einander berührenden geraden Linien EH, HG den zwey einander berührenden geraden Linien *KD*, *D*L parallel sind, und nicht in *einer* Ebene mit ihnen liegen, so schliessen sie (11, 10. S.) gleiche Winkel ein; der Winkel EHG ist also dem Winkel *KD*L gleich. Da ferner die zwey Linien EH, HG den zweyen *KD*, *D*L stückweise gleich sind, und der Winkel EHG dem Winkel *KD*L gleich ist, so ist die Grundlinie EG der Grundlinie *K*L gleich, und mithin das Dreyeck EHG dem Dreyecke *KD*L gleich und ähnlich. Aus eben den Gründen ist auch das Dreyeck AEG dem Dreyecke H*K*L gleich und ähnlich; folglich ist die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck AEG, und zur Spize den Punkt H, der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck H*K*L, und zur Spize den Punkt D, gleich und ähnlich. Und weil mit der Seite AB des Dreyecks A*D*B die H*K* parallel gezogen worden, so ist (1, 29 S.) das Dreyeck A*D*B dem Dreyecke *D*H*K* gleichwinkelig, und beyde haben (6, 4. S.) proportionirte Seiten, folglich ist das Dreyeck A*D*B dem Dreyecke *D*H*K* ähnlich. Aus eben den Gründen ist auch das Dreyeck *D*BC dem Dreyecke *D*KL, und das Dreyeck A*D*C dem Dreyecke *D*HL ähnlich. Und da die zwey einander berührenden geraden Linien BA, AC den zwey einander berührenden geraden Linien KH, HL parallel sind, und nicht in *einer* Ebene mit ihnen liegen, so schliessen sie (11, 10. S.) gleiche Winkel ein; es ist also der Winkel BAC dem Winkel KHL gleich, und es verhält sich die BA zu der AC wie die KH zu der HL; folglich ist (6, 6. S.) das Dreyeck ABC dem Dreyecke HKL ähnlich, und mithin ist auch die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck ABC, und zur Spize den Punkt D, der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck HKL, und zur Spize den Punkt *D*, ähnlich. Aber von der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck HKL, und zur Spize den Punkt *D*, ist gezeigt worden, dass sie der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck AEG, und zur Spize den Punkt H, ähnlich sey; folglich ist auch die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck ABC,

und

und zur Spize den Punkt *D*, ähnlich der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck AEG und zur Spize den Punkt H; mithin sind die beyden Pyramiden AEGH, HKLD der ganzen Pyramide ABCD ähnlich Und da die BF der FC gleich ist, so ist (1, 41. S.) das Parallelogramm EBFG das Doppelte des Dreyecks GFC.



Da aber, wenn zwey Prismen gleich hoch sind, deren eines ein Parallelogramm, das andere aber ein Dreyeck zur Grundfläche hat, so, daſs das Parallelogramm das Doppelte des Dreyecks ist, (11, 40. S.) die Prismen einander gleich sind, so ist das von den zwey Dreyecken BKF, EHG, und den drey Parallelogrammen EBFG, EBKH, KHGF eingeschlossene Prisma dem von den zwey Dreyecken GFC, HKL und den drey Parallelogrammen KFCL, LCGH, HKFG eingeschlossenen gleich. Auch ist es offenbar, daſs jedes der beyden Prismen, das, welches zur Grundfläche hat das Parallelogramm EBFG, und zur gegenüberliegenden Seitenlinie die HK, und das, welches zur Grundfläche hat das Dreyeck GFC, und zur gegenüberliegenden Seitenfläche das Dreyeck KLH, gröſser sey, als jede der beyden Pyramiden, deren Grundflächen die Dreyecke AEG, HKL, und deren Spizen die Punkte H, *D* sind. Wenn man nämlich die Linien EF, EK ziehet, so ist das Prisma, das zur Grundfläche hat das Parallelogramm EBFG, und zur gegenüberliegenden Seitenlinie die HK, gröſser, als die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck EBF, und zur Spize den Punkt K. Aber die Pyramide, deren Grundfläche das Dreyeck EBF, und deren Spize der Punkt K ist, ist (11, 10. Erkl.) gleich der Pyramide, deren Grundfläche das Dreyeck AEG, und deren Spize der Punkt H ist, denn sie werden von gleichen und ähnlichen Flächen eingeschlossen; folglich ist auch das Prisma, das zur Grundfläche hat das Parallelogramm

EBFG

EBFG und, zur gegenüberliegenden Seitenlinie die HK, grösser, als die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck AEG, und zur Spize den Punkt H. Aber das Prisma, das zur Grundfläche hat das Parallelogramm EBFG, und zur gegenüberliegenden Seitenlinie die HK, ist gleich dem Prisma, das zur Grundfläche hat das Dreyeck GFC, und zur gegenüberliegenden Seitenfläche das Dreyeck HKL; und die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck AEG, und zur Spize den Punkt H, ist gleich der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck HKL und zur Spize den Punkt *D*; folglich sind die zwey genannten Prismen grösser, als die zwey genannten Pyramiden, deren Grundflächen sind die Dreyecke AEG, HKL, die Spizen aber die Punkte H, *D*.

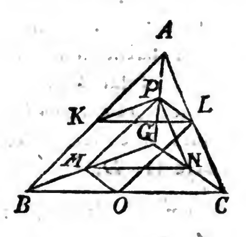
Demnach ist die ganze Pyramide, deren Grundfläche ist das Dreyeck ABC, und die Spize der Punkt *D*, in zwey gleiche, einander selbst und der ganzen ähnliche, Pyramiden und in zwey gleiche Prismen, welche grösser sind, als die Hälfte der ganzen Pyramide, getheilt worden, w. z. v. w.

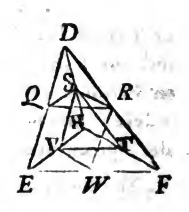
4. *Saz.*

Lehrsaz. Wenn zwey dreyseitige Pyramiden gleich hoch sind, und man jede derselben in zwey gleiche und der ganzen ähnliche Pyramiden und in zwey gleiche Prismen, und jede der solchergestalt entstandenen Pyramiden wiederum ebenso theilt, und dies immer so fortsezt, so verhält sich die Grundfläche der einen Pyramide zur Grundfläche der andern wie die Summe aller Prismen in der einen Pyramide zu der gleichgrossen Summe aller Prismen in der andern.

Es seyen die zwey gleichhohen Pyramiden, die zu Grundflächen die Dreyecke ABC, *DEF*, ihre Spizen aber in den Punkten G, H haben, und man theile jede derselben in zwey einander gleiche und der ganzen ähnliche Pyra-

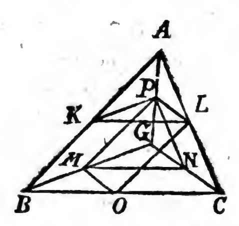
ramiden; und in zwey gleiche Prismen, und jede der so entstandenen Pyramiden gedenke man sich wiederum ebenso getheilt, und dies seze man immer so fort, so behaupte ich, dass die Grundfläche ABC zu der Grundfläche DEF sich verhalte wie die Summe aller Prismen in der Pyramide ABCG zu der gleich grossen Summe aller Prismen in der Pyramide DEFH.

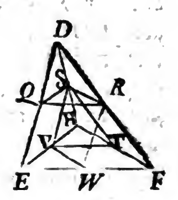




Beweis. Da die BO der OC, die AL aber der LC gleich ist, so ist (6, 2. S.) die OL der AB parallel, und (6, 4. S.) das Dreyeck ABC dem Dreyecke LOC ähnlich. Aus gleichen Gründen ist auch das Dreyeck DEF dem Dreyecke RWF ähnlich. Und weil die BC das Doppelte von der CO, und die EF das Doppelte von der FW ist, so verhält sich die BC zu der CO wie die EF zu der FW. Auch sind von den beyden BC, CO die ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigen Figuren ABC, LOC, von den beyden EF, FW aber die ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinigen Figuren DEF, RWF beschrieben worden; folglich verhält sich (6, 22. S.) das Dreyeck BAC zum Dreyeck LOC wie das Dreyeck DEF zum Dreyecke RWF, und *verwechselt*, das Dreyeck ABC zum Dreyecke DEF wie das Dreyeck LOC zum Dreyecke RWF. Aber, wie nachher gezeigt werden soll, verhält sich das Dreyeck LOC zum Dreyecke RWF wie das Prisma, dessen Grundfläche ist das Dreyeck LOC, die gegenüberliegende Seitenfläche aber das Dreyeck PMN, zu dem Prisma, dessen Grundfläche ist das Dreyeck RWF, und die gegenüberliegende Seitenfläche das Dreyeck STV; folglich verhält sich (5, 11. S.) das Dreyeck ABC zum Drey-

Dreyecke *D*EF wie das Prisma, dessen Grundfläche ist das Dreyeck LOC, die gegenüberliegende Seitenfläche aber das Dreyeck PMN, zu dem Prisma, dessen Grundfläche ist das Dreyeck RWF, und die gegenüberliegende Seitenfläche das Dreyeck STV. Und da sowohl die zwey Prismen in der Pyramide ABCG, als die zwey Prismen in der Pyramide DEFH einander gleich sind, so verhält sich das Prisma, dessen Grundfläche das Parallelogramm KLOB, die gegenüberliegende Seitenlinie aber die MP ist, zu dem Prisma, dessen Grundfläche das Dreyeck LOC, und die gegenüberliegende Seitenfläche das Dreyeck PMN ist, wie das Prisma, dessen Grundfläche das Parallelogramm EQRW, und die gegenüberliegende Seitenlinie die SV ist, zu dem Prisma, dessen Grundfläche das Dreyeck RWF, und die gegenüberliegende Seitenfläche das Dreyeck STV ist. Demnach verhält sich *verbunden* (5, 18. S.) die Summe der Prismen KBOLMP, LOCMNP zu dem Prisma LOCMNP wie die Summe der Prismen QEWRSV, RWFSTV zu dem Prisma RWFSTV, und *verwechselt*, die Summe der Prismen KBOLPM, LOCPMN zu der Summe der Prismen QEWRSV, RWFSTV, wie das Prisma LOCPMN zu dem Prisma RWFSTV. Es ist aber gezeigt worden, daſs das Prisma LOCPMN zu dem Prisma RWFSTV sich verhalte wie die Grundfläche LOC zu der Grundfläche RWF, und wie die Grundfläche ABC zu der Grundfläche *D*EF; folglich verhält sich auch das Dreyeck ABC zum Dreyecke *D*EF wie die zwey Prismen in der Pyramide ABCG zu den zwey Prismen in der Pyramide *D*EFH. Auf eben die Art nun verhält sich, wenn man die so entstandenen Pyramiden, dergleichen die PMNG, STVH sind, wiederum ebenso theilt, die Grundfläche PMN zur Grundfläche STV wie die zwey Prismen in der Pyramide PMNG zu den zwey Prismen in der Pyramide STVH. Aber die Grundfläche PMN verhält sich zur Grundfläche STV wie Grundfläche ABC zur Grundfläche *D*EF; folglich verhält sich die Grundfläche ABC zur Grundfläche *D*EF wie die zwey Prismen in der Pyramide ABCG zu den zwey Prismen in der Pyramide *D*EFH, und





und wie die zwey Prismen in der Pyramide PMNG zu den zwey Prismen in der Pyramide STVH, und wie viere zu vieren. Eben dies kann aber auch von den übrigen Prismen gezeigt werden, welche durch die Theilung der Pyramiden AKLP, DQRS und aller übrigen, der Zahl nach gleichen, entſtehen, w. z. e. w.

Lehnſaz. Daſs das Dreyeck LOC zum Dreyecke RWF ſich verhalte wie das Prisma, deſſen Grundfläche das Dreyeck LOC, die gegenüberliegende Seitenfläche aber das Dreyeck PMN iſt, zu dem Prisma deſſen Grundfläche RWF, und die gegenüberliegende Seitenfläche STV iſt, kann auf folgende Art gezeigt werden:

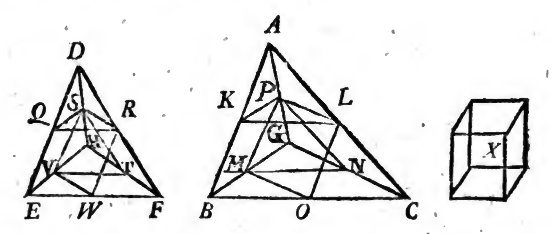
Man gedenke in der nämlichen Figur von den Punkten G, H Lothe nach den Ebenen der Dreyecke ABC, DEF gefällt, welche einander gleich ſeyn werden, weil die Pyramiden, nach der Vorausſezung, gleich hoch ſind. Und weil zwey gerade Linien die GC, und das von dem Punkte G aus gefällte Loth von den parallelen Ebenen ABC, PMN geſchnitten werden, ſo werden ſie (11, 17. S.) nach einerley Verhältniſs geſchnitten. Es wird aber die GC von der Ebene PMN in dem Punkte N halbirt; folglich wird auch das von dem Punkte G nach der Ebene ABC gefällte Loth von der Ebene PMN halbirt. Aus eben dem Grunde wird auch das von dem Punkte H nach der Ebene DEF gefällte Loth von der Ebene STV halbirt. Es ſind aber die von den Punkten G, H nach den Ebenen ABC, DEF gefällten Lothe einander gleich; folglich ſind auch die von den Dreyecken PMN, STV nach

nach den Dreyecken ABC, DEF gehenden Lothe einander gleich, und mithin sind die Prismen gleich hoch, die zu Grundflächen die Dreyecke LOC, RWF haben, und deren gegenüberliegende Seitenflächen die Dreyecke PMN, STV sind; demnach verhalten sich (11, 32. S.) die gleich hohen Parallelepipeda, die von den genannten Prismen beschrieben werden, zu einander wie ihre Grundflächen. Ebenso verhalten sich auch ihre Hälften; die Grundfläche LOC also verhält sich zur Grundfläche RWF wie die genannten Prismen sich zu einander verhalten, w. z. e. w.

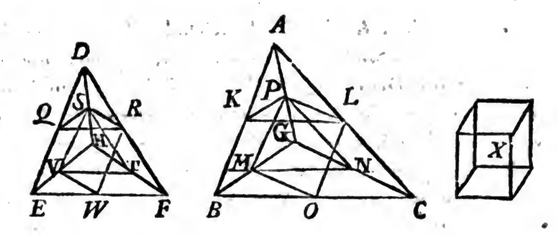
5. *Saz.*

Lehrsaz. Dreyseitige Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich zusammen wie ihre Grundflächen.

Es seyen zwey Pyramiden von gleicher Höhe, deren Grundflächen die Dreyecke ABC, DEF und deren Spizen die Punkte G, H seyen, so behaupte ich, daſs die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF sich verhalte, wie die Pyramide ABCG zur Pyramide DEFH.



Beweis. Wäre dies nicht, so müſste die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF sich verhalten wie die Pyramide ABCG zu einem Körper der kleiner oder gröſser wäre, als die Pyramide DEFH. Es sey dieser Körper *zuerst* kleiner, und heiſse X. Man theile die Pyramide DEFH in zwey einander gleiche und der ganzen ähnliche Pyramiden und in zwey gleiche Prismen, so sind (12, 3. S.) die



die zwey Prismen zusammen grösser, als die Hälfte der ganzen Pyramide. Die durch diese Theilung erhaltenen Pyramiden theile man wiederum auf ähnliche Art, und seze dies so fort, bis man von der Pyramide DEFH eine Anzahl von Pyramiden genommen hat, die zusammen kleiner sind, als der Ueberschuss, um welchen die Pyramide DEFH den Körper X übertrifft. Man nehme sie also, und sie seyen zum Beyspiele die Pyramiden DQRS, STVH, so sind mithin die in der Pyramide DEFH übrigbleibenden Prismen grösser, als der Körper X. Man theile auch die Pyramide ABCG auf ähnliche Art, und in ebensoviele Theile, als die Pyramide DEFH, so verhält sich (12, 4. S.) die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF wie die Summe aller Prismen in der Pyramide ABCG zur Summe aller Prismen in der Pyramide DEFH. Aber, nach der Voraussezung verhält sich die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF wie die Pyramide ABCG zu dem Körper X; folglich verhält sich auch die Pyramide ABCG zu dem Körper X wie die Summe aller Prismen in der Pyramide ABCG zur Summe aller Prismen in der Pyramide DEFH, und *verwechselt*, die Pyramide ABCG zur Summe der in ihr befindlichen Prismen, wie der Körper X zur Summe der in der Pyramide DEFH befindlichen Prismen. Es ist aber die Pyramide ABCG grösser, als die Summe der in ihr befindlichen Prismen, folglich ist auch der Körper X grösser, als die Summe der in der Pyramide DEFH befindlichen Prismen. Er ist aber auch kleiner, welches unmöglich ist; folglich verhält sich nicht die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF wie die Pyramide ABCG zu einem Körper, der klei-

kleiner wäre, als die Pyramide *D*EFH. Auf ähnliche Art kann nun gezeigt werden, daſs auch die Grundfläche *D*EF ſich nicht ſo zu der Grundfläche ABC verhalte, wie die Pyramide *D*EFH zu einem Körper der kleiner wäre, als die Pyramide ABCG.

Ich behaupte aber ferner, daſs auch die Grundfläche ABC ſich nicht ſo zu der Grundfläche *D*EF verhalte, wie die Pyramide ABCG zu einem Körper der gröſſer wäre, als die Pyramide *D*EFH. Denn es finde, die Möglichkeit angenommen, dieſes Verhältniſs Statt, und es ſey dieſer Körper X, ſo verhält ſich auch *umgekehrt* die Grundfläche *D*EF zur Grundfläche ABC wie der Körper X zur Pyramide ABCG. Aber wie der Körper X zur Pyramide ABCG ſich verhält, ſo verhält ſich die Pyramide *D*EFH, wie oben (12, 2. Lehnſ. 2.) gezeigt worden iſt, zu einem Körper der kleiner iſt, als die Pyramide ABCG; folglich verhält ſich auch die Grundfläche *D*EF zur Grundfläche ABC wie die Pyramide *D*EFH zu einem Körper, der kleiner iſt, als die Pyramide ABCG, welches ungereimt iſt; folglich verhält ſich die Grundfläche ABC nicht ſo zu der Grundfläche *D*EF, wie die Pyramide ABCG zu einem Körper, der gröſſer iſt, als die Pyramide *D*EFH. Es iſt aber gezeigt worden, daſs ſie ſich auch nicht zu einem kleinern Körper ſo verhalte; folglich verhält ſich die Grundfläche ABC zur Grundfläche *D*EF wie die Pyramide ABCG zur Pyramide *D*EFH.

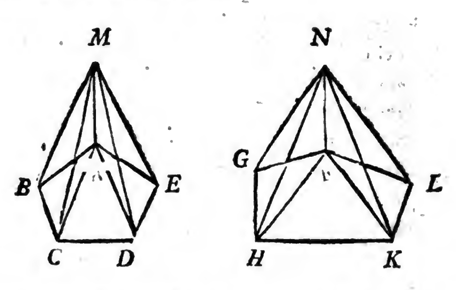
Demnach verhalten ſich dreyſeitige Pyramiden von gleicher Höhe u. ſ. w. w. z. e. w.

6. *Saz.*

Lehrſaz. Vielſeitige Pyramiden von gleicher Höhe verhalten ſich zuſammen wie ihre Grundflächen.

Es

Es feyen zwey Pyramiden von gleicher Höhe, welche zu Grundflächen die Polygone ABCDE, FGHKL haben, und deren Spizen in den Punkten M, N feyen, fo behaupte ich, dafs die Grundfläche ABCDE zu der Grundfläche FGHKL fich verhalte wie die Pyramide ABCDEM zu der Pyramide FGHKLN.



Beweis. Man theile die Grundfläche ABCDE in die Dreyecke ABC, ACD, ADE, und die Grundfläche FGHKL in die Dreyecke FGH, FHK, FKL und über jedem diefer Dreyecke gedenke man fich eine Pyramide von gleicher Höhe mit den Anfangs gefezten. Da nun (12, 5. S.) das Dreyeck ABC zum Dreyecke ACD fich verhält wie die Pyramide ABCM zur Pyramide ACDM, und *verbunden*, (5, 18. S.) das Trapezion ABCD zum Dreyecke ACD wie die Pyramide ABCDM zur Pyramide ACDM, aber auch das Dreyeck ACD zum Dreyecke ADE wie die Pyramide ACDM zur Pyramide ADEM, fo verhält fich auch *gleichförmig* (5, 22. S.) die Grundfläche ABCD zur Grundfläche ADE wie die Pyramide ABCDM zur Pyramide ADEM, und wiederum *verbunden* die Grundfläche ABCDE zur Grundfläche ADE wie die Pyramide ABCDEM zur Pyramide ADEM. Aus eben den Gründen verhält fich auch die Grundfläche FGHKL zur Grundfläche FKL wie die Pyramide FGHKLN zur Pyramide FKLN. Und da ADEM, FKLN zwey dreyfeitige Pyramiden von gleicher Höhe find, fo verhält fich die Grundfläche ADE zur Grundfläche FKL wie die Pyramide ADEM zur Pyramide FKLN.

Da

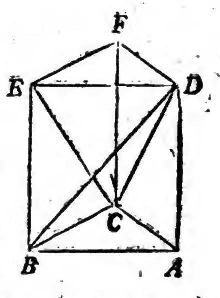
Da nun die Grundfläche ABCDE zur Grundfläche ADE sich verhält wie die Pyramide ABCDEM zur Pyramide ADEM, und die Grundfläche ADE zur Grundfläche FKL wie die Pyramide ADEM zur Pyramide FKLN, so verhält sich auch *gleichförmig* die Grundfläche ABCDE zur Grundfläche FKL wie die Pyramide ABCDEM zur Pyramide FKLN. Aber wie die Grundfläche FKL zur Grundfläche FGHKL, so verhält sich die Pyramide FKLN zur Pyramide FGHKLN; folglich verhält sich wiederum *gleichförmig* die Grundfläche ABCDE zur Grundfläche FGHKL wie die Pyramide ABCDEM zur Pyramide FGHKLN.

Demnach verhalten sich auch vielseitige Pyramiden von gleicher Höhe u. s. w. w. z. e. w.

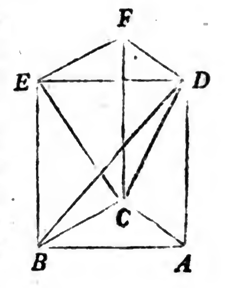
7. *Saz.*

Lehrsaz. Jedes dreyseitige Prisma läſst sich in drey einander gleiche dreyseitige Pyramiden theilen.

Es sey ein Prisma dessen Grundfläche das Dreyeck ABC, und die gegenüberliegende Seitenfläche das Dreyeck DEF sey, so behaupte ich, daſs das Prisma ABCDEF sich in drey einander gleiche dreyseitige Pyramiden theile lasse.



Beweis. Man ziehe die Linien BD, EC, CD. Da nun ABED ein Parallelogramm und BD dessen Diagonale ist, so ist (1, 31. S.) das Dreyeck ABD dem Dreyecke EDB gleich; folglich ist (12, 5. S.) die Pyramide die zur Grundfläche hat das Dreyeck ABD, und zur Spize den Punkt C, gleich der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck EDB und zur Spize den Punkt C. Aber die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck EDB, und zur Spize den Punkt C,



ist einerley mit der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck EBC, und zur Spize den Punkt D. Denn sie werden von einerley Ebenen eingeschlossen; folglich ist auch die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck ADB und zur Spize den Punkt C, gleich der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck EBC und zur Spize den Punkt D.

Ferner da FCBE ein Parallelogramm, und CE dessen Diagonale ist, so ist (1, 34. S.) das Dreyeck ECF dem Dreyecke CBE gleich; folglich ist (12, 5. S.) auch die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck BEC, und zur Spize den Punkt D, gleich der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck ECF, und zur Spize den Punkt D. Aber von der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck BCE und zur Spize den Punkt D, ist gezeigt worden, dass sie der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck ABD, und zur Spize den Punkt C, gleich sey; folglich ist auch die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck CEF, und zur Spize den Punkt D, gleich der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck ABD, und zur Spize den Punkt C. Das Prisma ABCDEF wird also in drey einander gleiche dreyseitige Pyramiden getheilt. Und da die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck ABD, und zur Spize den Punkt C, einerley ist mit der Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck CAB, und zur Spize den Punkt D, indem sie von einerley Flächen eingeschlossen werden, von der Pyramide aber, die zur Grundfläche hat das Dreyeck ABD, und zur Spize den Punkt C, gezeigt worden ist, dass sie der dritte Theil des Prisma sey, dessen Grundfläche das Dreyeck ABC, und die gegenüberliegende Seitenfläche das Dreyeck DEF ist; so ist auch die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Dreyeck ABC, und zur Spize den Punkt D, der dritte Theil eines Prisma, das einerley Grundfläche mit

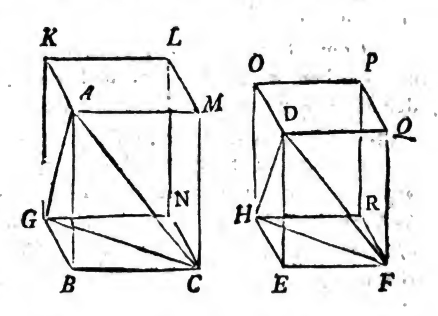
mit ihr hat, nämlich das Dreyeck ABC, und dessen gegenüberliegende Seitenfläche das Dreyeck DEF ist, w. z. e. w.

Zusaz. Hieraus erhellet, dass jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma sey, das mit ihr einerley Grundfläche und gleiche Höhe hat, weil, wenn die Grundfläche des Prisma eine andere geradlinige Figur, und die ihr gegenüberliegende Seitenfläche die nämliche ist, es sich in Prismen theilen läſst, deren Grundflächen sowohl, als die gegenüberliegenden Seitenflächen, Dreyecke sind.

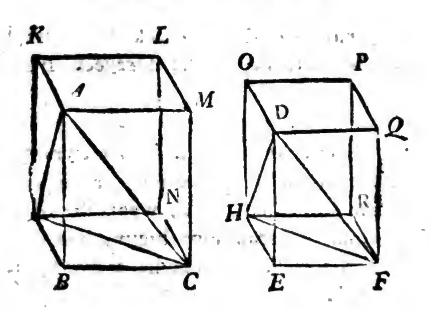
8. *Saz.*

Lehrsaz. Aehnliche dreyseitige Pyramiden sind in dreymal höherem Verhältnisse ihrer homologen Seiten.

Es seyen zwey ähnliche und ähnlichliegende Pyramiden, deren Grundflächen die Dreyecke ABC, DEF, und deren Spizen die Punkte G, H, so behaupte ich, dass die Pyramide ABCG zur Pyramide DEFH ein dreymal höheres Verhältniſs habe, als die BC zu der EF.



Beweis. Man vollende die Parallelepipeda BGML, EHQP. Da nun die Pyramide ABCG der Pyramide DEFH ähnlich ist, so ist (1, 9. Erkl.) der Winkel ABC dem



dem Winkel DEF, der Winkel GBC dem Winkel HEF und der Winkel ABG dem Winkel DEH gleich, und es verhält sich die AB zu der DE wie die BC zu der EF, und die BG zu der EH. Da nun die AB zu der DE wie die BC zu der EF sich verhält, also die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt sind, so ist das Parallelogramm BM dem Parallelogramme EQ ähnlich. Aus eben den Gründen ist das Parallelogramm BN dem Parallelogramme ER, und das Parallelogramm BK dem Parallelogramme EO ähnlich; die drey Parallelogramme BM, KB, BN sind also den dreyen EQ, EO, ER ähnlich. Aber (11, 24. S.) sind sowohl die drey MB, BK, BN, als die EQ, EO, ER, den gegenüberliegenden gleich und ähnlich; folglich werden die Körper BGML, EHQP von gleichvielen ähnlichen Flächen eingeschlossen, und mithin ist (11, 9. Erkl.) der Köaper BGML dem Körper EHQP ähnlich. Aber (11, 33. S.) sind ähnliche Parallelepipeda in dreymal höherem Verhältnisse ihrer homologen Seiten; folglich hat der Körper BGML zu dem Körper EHQP ein dreymal höheres Verhältniss, als die homologe Seite BC zu der homologen Seite EF. Aber (5, 15. S.) verhält sich der Körper BGML zu dem Körper EHQP wie die Pyramide ABCG zur Pyramide DEFH, denn die Pyramide ist der sechste Theil des ganzen Körpers, da das Prisma, als die Hälfte des Parallelepipedons, das Dreyfache der Pyramide ist; folglich hat auch die Pyramide ABCG zu der Pyramide

DEFH

DEFH ein dreymal höheres Verhältniſs, als die BC zu der EF w. z. e. w.

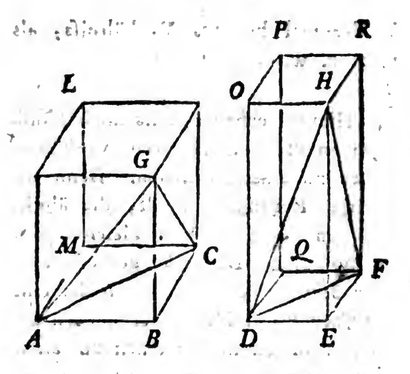
Zuſaz. Hieraus erhellet, daſs auch ähnliche vielſeitige Pyramiden in dreymal höherem Verhältniſſe ihrer homologen Seiten zu einander ſtehen. Denn da, wenn man ſie in dreyſeitige Pyramiden theilt, die ähnlichen vielſeitigen Grundflächen (6, 20. S.) in gleichviele ähnliche und den ganzen homologe Dreyecke getheilt werden, ſo verhält ſich eine dreyſeitige Pyramide in der einen ganzen zu einer dreyſeitigen Pyramide in der andern ganzen wie alle dreyſeitigen Pyramiden in der einen zu allen dreyſeitigen Pyramiden in der andern, das heiſst, wie die eine vielſeitige Pyramide zur andern vielſeitigen Pyramide. Aber eine dreyſeitige Pyramide zu einer andern dreyſeitigen Pyramide iſt in dreymal höherem Verhältniſſe der homologen Seiten; folglich hat auch eine vielſeitige Pyramide zu einer andern von ähnlicher Grundfläche ein dreymal höheres Verhältniſs, als eine homologe Seite der einen zu einer homologen Seite der andern.

9. *Saz.*

Lehrſaz. In gleichen dreyſeitigen Pyramiden verhalten ſich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen; und dreyſeitige Pyramiden deren Grundflächen ſich umgekehrt wie die Höhen verhalten, ſind einander gleich.

Es ſeyen zwey gleiche Pyramiden, die zu Grundflächen die Dreyecke ABC, DEF und ihre Spizen in den Punkten G, H haben, ſo behaupte ich, daſs die Grundflächen der Pyramiden ABCG, DEFH den Höhen umgekehrt proportionirt ſeyen, das heiſst, daſs die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF ſich verhalte wie die Höhe der Pyramide DEFH zur Höhe der Pyramide ABCG.

Be-



Beweis. Man vollende die Parallelepipeda BGML, EHQP. Da nun die Pyramide ABCG der Pyramide DEFH gleich, und von der Pyramide ABCG der Körper BGML, von der Pyramide DEFH aber der Körper EHQP das Sechsfache ist, so ist (5, 15. S.) der Körper BGML dem Körper EHQP gleich. Gleiche Pararallelepipeda aber haben (11, 34. S.) Grundflächen die den Höhen umgekeht porportionirt sind; es verhält sich also die Grundfläche BM zur Grundfläche EQ wie die Höhe des Körpers EHQP zur Höhe des Körpers BGML. Aber die Grundfläche BM verhält sich zur Grundfläche EQ wie das Dreyeck ABC zum Dreyecke DEF; folglich verhält sich auch das Dreyeck ABC zum Dreyecke DEF wie die Höhe des Körpers EHQP zur Höhe des Körpers BGML. Aber die Höhe des Körpers EHQP ist einerley mit der Höhe der Pyramide DEFH, und die Höhe des Körpers BGML ist einerley mit der Höhe der Pyramide ABCG; es verhält sich also die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF wie die Höhe der Pyramide DEFH zur Höhe der Pyramide ABCG; folglich sind die Grundflächen der Pyramiden ABCG, DEFH den Höhen umgekehrt proportionirt.

Es seyen nun *zweytens* die Grundflächen der Pyramiden ABCG, DEFH den Höhen umgekehrt proportionirt, und es verhalte sich die Grundfläche ABC zur Grundfläche

DEF

DEF wie die Höhe der Pyramide DEFH zur Höhe der Pyramide ABCG, ſo behaupte ich, daſs die Pyramide ABCG der Pyramide DEFH gleich ſey.

Da, nach der vorigen Conſtruction, die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF ſich verhält wie die Höhe der Pyramide DEFH zur Höhe der Pyramide ABCG, und die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF wie das Parallelogramm BM zu dem Parallelogramme EQ, ſo verhält ſich auch das Parallelogramm BM zu dem Parallelogramme EQ wie die Höhe der Pyramide DEFH zur Höhe der Pyramide ABCG. Aber die Höhe der Pyramide DEFH iſt einerley mit der Höhe des Parallelepipedons EHQP, und die Höhe der Pyramide ABCG iſt einerley mit der Höhe des Parallelepipedons BGML; es verhält ſich alſo die Grundfläche BM zur Grundfläche EQ wie die Höhe des Parallelepipedons EHQP zur Höhe des Parallelepipedons BGML. Parallelepipeda aber, deren Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt ſind, ſind (11, 34. S.) einander gleich; folglich iſt das Parallelepipedon BGML dem Parallelepipedon EHQP gleich. Nun iſt von dem Körper BGML die Pyramide ABCG, und von dem Körper EHQP die Pyramide DEFH der ſechſte Theil; folglich iſt die Pyramide ABCG der Pyramide DEFH gleich.

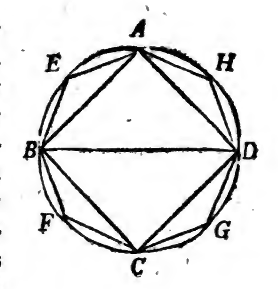
Demnach ſind in gleichen dreyſeitigen Pyramiden die Grundflächen u. ſ. w. w. z. e. w.

10. *Saz.*

Lehrſaz. Jeder Kegel iſt der dritte Theil eines Cylinders, der einerley Grundfläche und gleiche Höhe mit ihm hat.

Es habe ein Kegel einerley Grundfläche mit einem Cylinder nämlich den Kreis ABCD, und eine gleiche Höhe, ſo behaupte ich, daſs der Kegel der dritte Theil des Cylinders, das heiſst, daſs der Cylinder das Dreyfache des Kegels ſey.

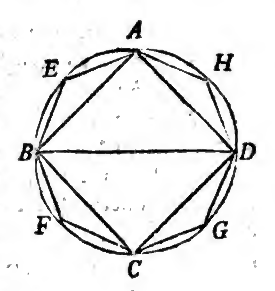
Be-



Beweis. Wenn der Cylinder nicht das Dreyfache des Kegels ist, so ist er entweder grösser, oder kleiner, als das Dreyfache. Er sey *zuerst* grösser, als das Dreyfache, so beschreibe man in den Kreis ABCD das Quadrat ABCD und das Quadrat ABCD ist grösser, als die Hälfte des Kreises ABCD. Hierauf errichte man auf dem Quadrate ABCD ein mit dem Cylinder gleich hohes Prisma, welches grösser, als die Hälfte des Cylinders, seyn wird. Denn wenn man um den Kreis ABCD ein Quadrat beschreibt, so ist das darein beschriebene Quadrat die Hälfte des darum beschriebenen; auch sind die über diesen Grundflächen errichteten gleich hohen Parallelepipeda die Prismen selbst, folglich verhalten sich die Prismen wie die Grundflächen, und mithin ist das über dem Quadrate ABCD errichtete Prisma die Hälfte des über dem, um den Kreis ABCD beschriebenen, Quadrate errichteten Prismas; auch ist der Cylinder kleiner, als das über dem um den Kreis ABCD beschriebenen, Quadrate errichtete Prisma; folglich ist das über dem Quadrate ABCD in gleicher Höhe mit dem Cylinder errichtete Prisma grösser, als die Hälfte des Cylinders. Man halbire nun die Bogen AB, BC, CD, DA in den Punkten E, F, G, H, und ziehe die AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA, so ist, wie oben (12, 2. S.) gezeigt worden, jedes der Dreyecke AEB, BFC, CGD, DHA grösser, als der halbe Abschnitt des Kreises ABCD, in welchem es liegt. Man errichte nun über jedem der Dreyecke AEB, BFC, CGD, DAH mit dem Cylinder gleichhohe Prismen, so ist auch jedes der so errichteten Prismen grösser, als die Hälfte des ihm zugehörigen Abschnitts in dem Cylinder, weil, wenn man durch die Punkte E, F, G, H Parallelen mit den Linien AB, BC, CD, DA zieht, und die Parallelogramme AB, BC, CD, DA vollendet, über welchen die Parallelepipeda, unter glei-

die gleicher Höhe mit dem Cylinder, aufgerichtet werden, Hälften der so aufgerichteten Parallepipeden die über den Dreyecken AEB, BFC, CGD, DHA befindlichen Prismen sind. Auch sind die Abschnitte des Cylinders kleiner, als die aufgerichteten Parallelepipeda; folglich sind auch die über den Dreyecken AEB, BFC, CGD, DHA befindlichen Prismen gröſser, als die Hälften der zugehörigen Abschnitte des Cylinders. Halbirt man also die übriggebliebenen Bogen, ziehet alsdann die geraden Linien, uud errichtet über jedem der erhaltenen Dreyecke wiederum mit dem Cylinder gleich hohe Prismen, und sezt dies immer so fort, so werden endlich (12, 2. Lehnſ. 1.) Abschnitte des Cylinders übrig bleiben, welche kleiner seyn werden, als der Ueberschuſs, um welchen der Cylinder das Dreyfache des Kegels übertrifft. Es bleiben also solche übrig, und sie seyen AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA, so ist das übrigbleibende Prisma, dessen Grundfläche das Polygon AEBFCGDH, die Höhe aber die des Cylinders ist, gröſser, als das Dreyfache des Kegels. Aber (12, 7. Zuſ.) ist das Prisma, dessen Grundfläche das Polygon AEBFCGDH, und dessen Höhe die des Cylinders ist, das Dreyfache der Pyramide, deren Grundfläche das Polygon AEBFCGDH, und deren Spize die des Kegels ist; folglich ist auch die Pyramide, deren Grundfläche das Polygon AEBFCGDH, und deren Spize die des Kegels ist, gröſser, als der Kegel, der den Kreis ABCD zur Grundfläche hat. Sie ist aber auch kleiner, denn sie wird von ihm eingeschlossen, welches unmöglich ist. Folglich ist der Cylinder nicht gröſser, als das Dreyfache des Kegels.

Ich behaupte aber ferner, daſs der Cylinder auch nicht kleiner sey, als das Dreyfache des Kegels. Denn es sey, die Möglichkeit angenommen, der Cylinder kleiner, als das Dreyfache des Kegels, so ist umgekehrt der Kegel gröſser, als der dritte Theil des Cylinders. Man beschreibe in den Kreis ABCD das Quadrat ABCD, so ist das Quadrat ABCD gröſser, als die Hälfte des Kreises ABCD. Ueber dem Quadrate ABCD errichte man eine Pyramide, die



die mit dem Kegel einerley Spize habe, so ist diese Pyramide grösser, als die Hälfte des Kegels, weil, wie vorhin gezeigt worden ist, wenn man um den Kreis ein Quadrat beschreibt, das Quadrat ABCD die Hälfte des um den Kreis beschriebenen Quadrats ist. Und wenn man über den Quadraten mit dem Kegel gleich hohe Parallelepipeda, die auch Prismen genannt werden, errichtet, so ist das über dem Quadrate ABCD errichtete die Hälfte des über dem um den Kreis beschriebenen Quadrate errichteten, denn sie verhalten sich (11, 32. S.) wie ihre Grundflächen. Eben dies gilt auch von ihren Drittheilen; folglich ist die Pyramide, die zur Grundfläche hat das Quadrat ABCD, die Hälfte der Pyramide, die über dem um den Kreis beschriebenen Quadrate errichtet wird. Aber die über dem um den Kreis beschriebenen Quadrate errichtete Pyramide ist grösser, als der Kegel; denn sie enthält ihn in sich; folglich ist die Pyramide, deren Grundfläche das Quadrat ABCD, die Spize aber die des Kegels ist, grösser, als die Hälfte des Kegels. Man halbire die Bogen AB, BC, CD, DA in den Punkten E, F, G, H, und ziehe die Linien AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA, so ist jedes der Dreyecke AEB, BFC, CGD, DHA grösser, als die Hälfte des zu ihm gehörigen Abschnitts von dem Kreise ABCD. Man errichte über jedem der Dreyecke AEB, BFC, CGD, DHA Pyramiden, die einerley Spize mit dem Kegel haben, so ist jede der so errichteten Pyramiden grösser, als die Hälfte des ihr zugehörigen Abschnitts des Kegels. Halbirt man also die übrigbleibenden Bogen, zieht die geraden Linien, und errichtet über jedem der erhaltenen Dreyecke eine Pyramide, die mit dem Kegel einerley Spize hat, und sezt dies immer so fort, so behält man endlich (12, 2. Lehns. 1.) Kegelabschnitte übrig, die kleiner sind, als der Ueberschuss, um welchen der Kegel den dritten Theil

des

des Cylinders übertrifft. Sie bleiben also übrig, und seyen die über den AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA befindlichen; so ist die übriebleibende Pyramide, deren Grundfläche das Polygon AEBFCGDH, und deren Spize die des Kegels ist, gröſſer, als der dritte Theil des Cylinders. Aber (12, 7. Zus.) ist die Pyramide deren Grundfläche das Polygon AEBFCGDH, und deren Spize die des Kegels ist, der dritte Theil eines Prisma, dessen Grundfläche das Polygon AEBFCGDH, und dessen Höhe mit der des Cylinders einerley ist; folglich ist das Prisma, dessen Grundfläche das Polygon AEBFCGDH, und dessen Höhe mit der des Cylinders einerley ist, gröſſer, als der Cylinder, dessen Grundfläche der Kreis ABCD ist. Es ist aber auch kleiner, denn es ist in ihm enthalten, welches unmöglich ist. Folglich ist der Cylinder nicht kleiner, als das Dreyfache des Kegels. Es ist aber gezeigt worden, daſs er auch nicht gröſſer sey, als das Dreyfache, folglich ist der Cylinder das Dreyfache des Kegels, und mithin der Kegel der dritte Theil des Cylinders.

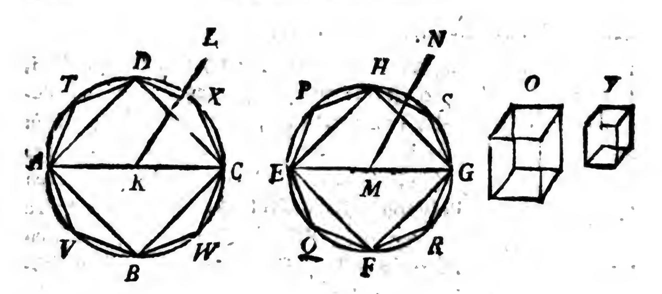
Demnach ist jeder Kegel der dritte Theil eines Cylinders u. s. w. w. z. e. w.

11. *Saz.*

Lehrsaz. Kegel und Cylinder von einerley Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

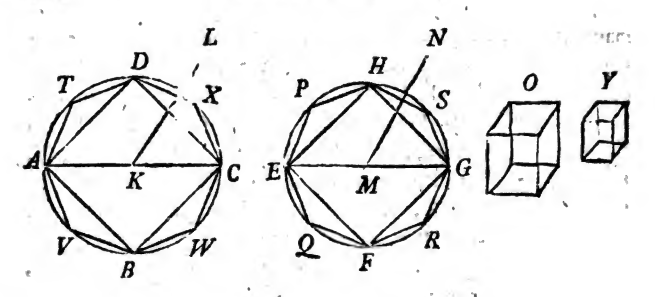
Es seyen Kegel und Cylinder von einerley Höhe, deren Grundflächen die Kreise ABCD, EFGH, die Axen aber die KL, MN, und die Durchmesser der Grundflächen AC, EG seyen, so behaupte ich, daſs der Kreis ABCD zum Kreise EFGH sich verhalte wie der Kegel AL zum Kegel EN.

Be-



Beweis. Wäre dies nicht, so verhielte sich der Kreis ABCD zum Kreise EFGH wie der Kegel AL zu einem Körper, der kleiner, oder grösser wäre, als der Kegel EN. Er sey *zuerst* kleiner, und heisse O, auch sey der Körper Y dem Unterschiede gleich, um welchen der Körper O kleiner ist, als der Kegel EN, so ist also der Kegel EN den Körpern O, Y zusammen gleich. Man beschreibe in dem Kreise EFGH das Quadrat EFGH, so ist dieses Quadrat grösser, als die Hälfte des Kreises. Man errichte über dem Quadrate EFGH eine mit dem Kegel gleich hohe Pyramide, so ist die errichtete Pyramide grösser, als die Hälfte des Kegels. Denn wenn man um den Kreis ein Quadrat beschreibt, und über diesem eine mit dem Kegel gleichhohe Pyramide errichtet, so ist die darein beschriebene Pyramide die Hälfte der darum beschriebenen, denn sie verhalten sich (12, 6. S.) zu einander wie ihre Grundflächen. Der Kegel aber ist kleiner, als die um ihn beschriebene Pyramide; folglich ist die Pyramide, deren Grundfläche das Quadrat EFGH, die Spize aber die des Kegels ist, grösser, als die Hälfte des Kegels. Man halbire die Bogen EF, FG, GH, HE in den Punkten Q, R, S, P, und ziehe die HP, PE, EQ, QF, FR, RG, GS, SH, so ist iedes der Dreyecke HPE, EQF, FRG, GSH grösser, als die Hälfte des zugehörigen Kreisabschnitts. Man errichte über jedem der Dreyecke HPE, EQF, FRG, GSH eine mit dem Kegel gleichhohe Pyramide, so ist auch jede der so errichteten Pyramiden grösser, als die Hälfte des zugehörigen Kegelabschnitts. Halbirt man

man also auch die übrig bleibenden Bogen aufs neue, zieht die geraden Linien, errichtet alsdann über jedem der Dreyecke mit dem Kegel gleichhohe Pyramiden, und sezt dies immer so fort, so behält man endlich (12, 2. Lehns. 1.) Kegelabschnitte übrig, die kleiner sind, als der Körper Y. Es bleiben also solche übrig, und seyen die über den HP, PE, EQ, QF, FR, RG, GS, SH befindlichen, so ist die übrigbleibende Pyramide, deren Grundfläche das Polygon HPEQFRGS, die Höhe aber die des Kegels ist, grösser, als der Körper O. Man beschreibe in dem Kreise ABCD ein dem Polygone HPEQFRGS ähnliches und ähnlichliegendes Polygon DTAVBWCX, und errrichte über demselben die mit dem Kegel gleichhohe Pyramide AL. Da nun (6, 20. S. und 12, 1. S.) das Quadrat von AC zu dem Quadrate von EG sich verhält wie das Polygon DTAVBWCX zu dem Polygone HPEQFRGS, das Quadrat von AC aber zu dem Quadrate von EG (12, 2. S.) wie der Kreis ABCD zum Kreise EFGH, so verhält sich (5, 11. S.) der Kreis ABCD zum Kreise EFGH wie das Polygon DTAVBWCX zu dem Polygone HPEQFRGS. Aber nach der Construction verhält sich der Kreis ABCD zum Kreise EFGH wie der Kegel AL zu dem Körper O, und (12, 6. S.) das Polygon DTAVBWCX zu dem Polygone HPEQFRGS wie die Pyramide, deren Grundfläche das Polygon DTAVBWCX, und deren Spize der Punkt L, zu der Pyramide, deren Grundfläche das Polygon HPEQFRGS, und deren Spize der Punkt N. Wie sich also der Kegel AL zu dem Körper O verhält, so verhält sich die Pramide, deren Grundfläche das Polygon DTAVBWCX, und deren Spize der Punkt L, zu der Pyramide, deren Grundfläche das Polygon HPEQFRGS, und deren Spize der Punkt N; folglich auch *verwechselt*, der Kegel AL zu der in ihm befindlichen Pyramide wie der Körper O zu der in dem Kegel EN befindlichen Pyramide. Der Kegel AL aber ist grösser, als die in ihm befindliche Pyramide; folglich ist auch der Körper O grösser, als die in dem Kegel EN befindliche Pyramide. Er ist aber auch kleiner, welches ungereimt ist; folglich verhält



hält sich der Kreis ABCD zum Kreise EFGH nicht so, wie der Kegel AL zu einem Körper der kleiner wäre; als der Kegel EN. Auf ähnliche Art kann nun gezeigt werden, dass auch der Kreis EFGH zum Kreise ABCD sich nicht so verhalte, wie der Kegel EN zu einem Körper, der kleiner wäre, als der Kegel AL.

Ich behaupte aber ferner, dass der Kreis ABCD zum Kreise EFGH sich auch nicht so verhalte, wie der Kegel AL zu einem Körper, der grösser ist, als der Kegel EN. Denn es sey, die Möglichkeit angenommen, dieser Körper grösser, und heisse O, so verhält sich *umgekehrt* der Kreis EFGH zum Kreise ABCD wie der Körper O zum Kegel AL. Aber der Körper O verhält sich zum Kegel AL wie der Kegel EN zu einem Körper, der kleiner ist, als der Kegel AL; folglich verhält sich auch der Kreis EFGH zum Kreise ABCD wie der Kegel EN zu einem Körper, der kleiner ist, als der Kegel AL, wovon die Unmöglichkeit gezeigt worden ist; folglich verhält sich der Kreis ABCD zum Kreise EFGH nicht so, wie der Kegel AL zu einem Körper der grösser ist, als der Kegel EN. Es ist aber gezeigt worden, dass dieser Körper auch nicht kleiner seyn könne; folglich verhält sich der Kreis ABCD zum Kreise EFGH wie der Kegel AL zum Kegel EN. Aber wie der Kegel zum Kegel, so verhält sich der Cylinder zum Cylinder, denn (12, 10. S.) ist der eine das Dreyfache des andern; folglich verhält sich auch der Kreis

ABCD

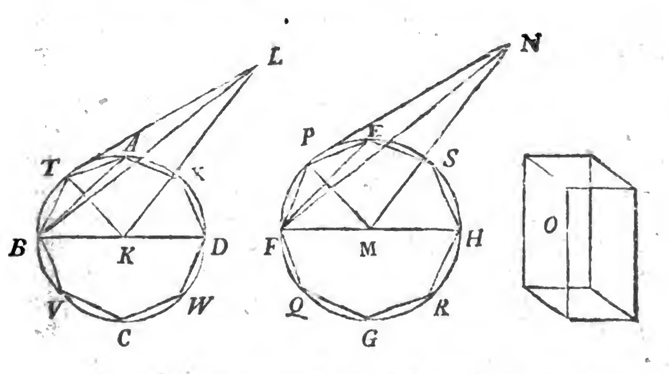
ABCD zum Kreise EFGH wie die über ihnen befindlichen mit den Kegeln gleichhohen Cylinder.

Demnach verhalten sich Kegel und Cylinder u. s. w. w. z. e. w.

12. *Saz.*

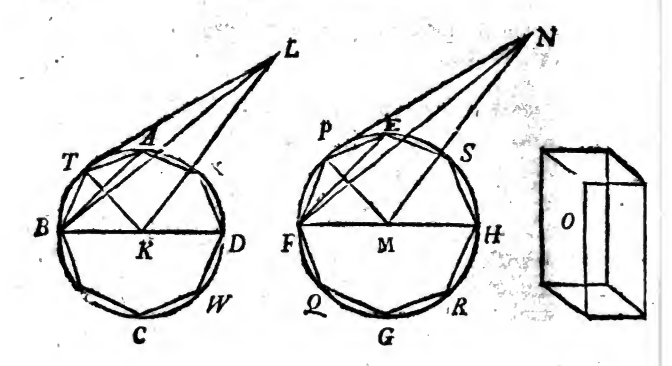
Lehrsaz. Aehnliche Kegel und Cylinder sind in dreymal höherem Verhältnisse der Durchmesser ihrer Grundflächen.

Es seyen ähnliche Kegel und Cylinder, deren Grundflächen die Kreise ABCD, EFGH, die Durchmesser aber BD, FH und die Axen der Kegel oder der Cylinder KL, MN seyen, so behaupte ich, dass der Kegel, dessen Grundfläche der Kreis ABCD, und dessen Spize der Punkt L ist, zu dem Kegel, dessen Grundfläche der Kreis EFGH, und dessen Spize der Punkt N ist, ein dreymal höheres Verhältnis habe, als die BD zu der FH.



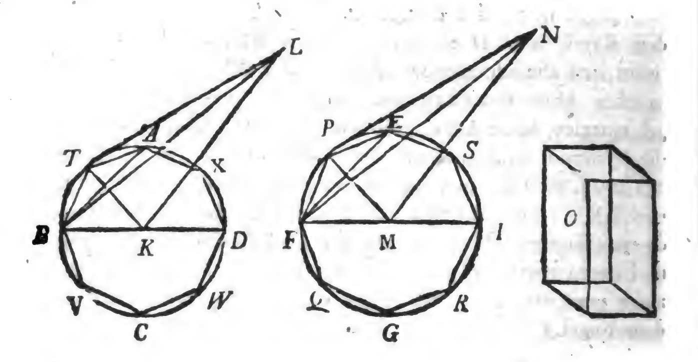
Beweis. Wenn der Kegel ABCDL zu dem Kegel EFGHN nicht ein dreymal höheres Verhältnis hat, als die BD zu der FH, so wird der Kegel ABCDL zu einem Körper der entweder kleiner, oder grösser ist, als der Kegel EGHN ein dreymal höheres Verhältnis haben,

Es



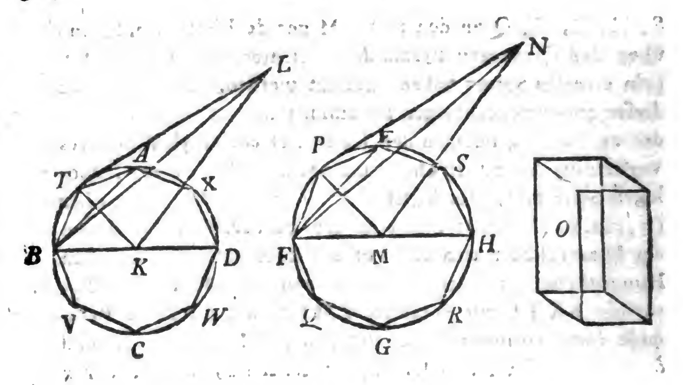
Es sey dieser Körper *zuerst* kleiner, und heisse O. Man beschreibe in den Kreis EFGH das Quadrat EFGH, so ist das Quadrat EFGH grösser, als die Hälfte des Kreises EFGH. Hierauf errichte man über dem Quadrate EFGH eine mit dem Kegel gleichhöhe Pyramide, so ist auch die errichtete Pyramide grösser, als die Hälfte des Kegels. Man halbire also die Bogen EF, FG, GH, HE in den Punkten P, Q, R, S, und ziehe die EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE, so ist jedes der Dreyecke EPF, FQG, GRH, HSE grösser, als die Hälfte des zugehörigen Abschnitts von dem Kreise EFGH. Man errichte ferner über jedem der Dreyecke EPF, FQG, GRH, HSE eine Pyramide, die mit dem Kegel einerley Spize habe, so ist auch jede der errichteten Pyramiden grösser, als die Hälfte des zugehörigen Kegelabschnitts. Halbirt man also die übrigbleibenden Bogen, zieht die geraden Linien, und errichtet über jedem der Dreyecke Pyramiden, die mit dem Kegel einerley Spize haben, und sezt dies immer so fort, so behält man endlich (12, 2. Lehns. 1.) Kegelabschnitte übrig, welche kleiner sind, als der Ueberschuss, um welchen der Kegel EFHN den Körper O übertrifft. Man behalte also solche übrig, und es seyen die über den Abschnitten EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE befindlichen, so ist die übrige Pyramide, deren Grundfläche das Polygon EPFQGRHS, die Spize aber der Punkt N ist,

ist, grösser, als der Körper O. Man beschreibe auch in dem Kreise ABCD ein dem Polygone EPFQGRHS ähnliches und ähnlichliegendes Polygon ATBVCWDX, und errichte über demselben eine Pyramide, die mit dem Kegel einerley Spize habe, und von den Dreyecken, welche die Pyramide einschliessen, deren Grundfläche das Polygon ATBVCWDX, und deren Spize der Punkt L ist, sey eins LBT, von den Dreyecken aber, welche die Pyramide einschliessen, deren Grundfläche das Polygon EPFQGRHS, und deren Spize der Punkt N ist, sey eins NFP; endlich ziehe man die *K*T, MP. Da nun der Kegel ABCDL dem Kegel EFGHN ähnlich ist, so verhält sich (11, 24. Erkl.) die BD zu der FH wie die Axe *K*L zu der Axe MN. Aber wie die BD zu der FH sich verhält, so verhält sich die B*K* zu der FM; folglich verhält sich auch die B*K* zu der FM wie die *K*L zu der MN, und mithin *verwechselt*, die B*K* zu der *K*L wie die FM zu der MN. Nun sind auch die Winkel B*K*L, FMN, als rechte, einander gleich, und die um die gleichen Winkel B*K*L, FMN liegenden Seiten proportionirt; folglich ist (6, 6. S.) das Dreyeck B*K*L dem Dreyecke FMN ähnlich. Ferner, da die B*K* zu der KT sich verhält wie die FM zu der MP, und diese um die gleichen Winkel B*K*T, FMP liegen, (denn der Winkel FMP ist der nämliche Theil von den vier rechten Winkeln, die um den Mittelpunkt M liegen, wie der Winkel B*K*T von den vier rechten Winkeln, die um den Mittelpunkt *K* liegen) da also die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt sind, so ist (6, 6. S.) das Dreyeck B*K*T dem Dreyecke FMP ähnlich. Ferner, da gezeigt worden ist, dass die B*K* zu der *K*L sich verhalte wie die FM zu der MN, die B*K* aber der *K*T, und die FM der MP gleich ist, so verhält sich die *K*T zu der *K*L wie die PM zu der MN, und es sind also die um die gleichen, nämlich rechten, Winkel TKL, PMN liegenden Seiten proportionirt; folglich ist das Dreyeck L*K*T dem Dreyecke MNP ähnlich. Da aber, wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke B*K*L, FMN, die LB zu der B*K* sich verhält wie die



NF zu der FM, und wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke BKT, FMP, die KB zu der BT wie die MF zu der FP, so verhält sich (5, 22. S.) auch *gleichförmig* die LB zu der BT wie die NF zu der FP. Ferner, da wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke LTK, NPM, die LT zu der TK sich verhält wie die NP zu der PM, und wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke KBT, PMF, die KT zu der TB wie die MP zu der PF, so verhält sich auch *gleichförmig*, die LT zu der TB wie die NP zu der PF. Es ist aber gezeigt worden, dass auch die TB zu der BL sich verhalte, wie die PF zu der FN; folglich verhält sich wiederum *gleichförmig*, die TL zu der LB wie die PN zu der NF, folglich sind die Seiten der Dreyecke LTB, NPF proportionirt, und mithin (6, 5 S.) die Dreyecke selbst gleichwinkelig und einander ähnlich; folglich ist (11, 9. Erkl.) auch die Pyramide, deren Grundfläche das Dreyeck BKT und deren Spize der Punkt L ist, ähnlich der Pyramide, deren Grundfläche das Dreyeck FMP, und deren Spize der Punkt N ist, denn sie werden von gleichvielen ähnlichen Flächen eingeschlossen. Aehnliche dreyseitige Pyramiden aber sind (12, 8. S.) in dreymal höherem Verhältnisse ihrer homologen Seiten; folglich hat die Pyramide BKTL zu der Pyramide FMPN ein dreymal höheres Verhältnifs, als die BK zu der FM. Auf ähnliche Art kann nun, wenn man von den Punkten A, X, D, W, C, V an den Punkt K, und von den Punkten E, S,

S, H, R, G, Q an den Punkt M gerade Linien zieht, und über den Dreyecken Pyramiden errichtet, die mit den Kegeln einerley Spizen haben, gezeigt werden, daſs auch jede dieſer zuſammengehörigen Pyramiden der erſten Art, zu jeder zuſammengehörigen der lezten Art ein dreymal höheres Verhältniſs habe, als die homologe Seite B*K* zu der homologen Seite FM, das heiſst, als die BD zu der FH. Aber (5, 12. S.) verhält ſich eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder wie alle Vorderglieder zuſammen zu allen Hintergliedern zuſammen; es verhält ſich alſo auch die Pyramide B*K*TL zur Pyramide EMPN wie die ganze Pyramide deren Grundfläche das Polygon ATBVCWDX, und deren Spize der Punkt L, zu der ganzen Pyramide, deren Grundfläche das Polygon EPFQGRHS, und deren Spize der Punkt N iſt; folglich hat auch die Pyramide, deren Grundfläche das Polygon ATBVCWDX, und deren Spize der Punkt L, zu der Pyramide, deren Grundfläche das Polygon EPFGQRHS und deren Spize der Punkt N iſt, ein dreymal höheres Verhältniſs, als die BD zu der FH. Es iſt aber angenommen, der Kegel, deſſen Grundfläche der Kreis ABCD, und deſſen Spize der Punkt L iſt, habe zu dem Körper O ein dreymal höheres Verhältniſs, als die BD zu der FH; wie ſich alſo der Kegel, deſſen Grundfläche der Kreis ABCD, und deſſen Spize der Punkt L iſt, zu dem Körper O verhält, ſo verhält ſich die Pyramide, deren Grundfläche das Polygon ATBVCWDX, und deren Spize der Punkt L iſt, zu der Pyramide, deren Grundfläche das Polygon EPFQGRHS, und deren Spize der Punkt N iſt, und *verwechſelt*, (5, 16. S.) wie der Kegel, deſſen Grundfläche der Kreis ABCD, und deſſen Spize der Punkt L iſt, zu der in ihm befindlichen Pyramide, deren Grundfläche das Polygon ATBVCWDX, und deren Spize der Punkt L, ſo verhält ſich der Körper O zu der Pyramide, deren Grundfläche das Polygon E*P*FQGRHS, und deren Spize der Punkt N iſt. Der genannte Kegel aber iſt gröſſer, als die in ihm befindliche Pyramide, denn er enthält ſie in ſich; folglich iſt auch der Körper O gröſſer, als die Pyramide, deren Grundfläche das Polygon E*P*FQGRHS, und deren



Spize der Punkt N ist. Er ist aber auch kleiner, welches unmöglich ist; folglich hat der Kegel, dessen Grundfläche der Kreis ABCD, und dessen Spize der Punkt L ist, nicht zu einem Körper, der kleiner ist, als der Kegel, dessen Grundfläche der Kreis EFGH und dessen Spize der Punkt N ist, ein dreymal höheres Verhältniss, als die BD zu der FH. Auf ähnliche Art kann nun gezeigt werden, dass auch der Kegel EFGHN nicht zu einem Körper, der kleiner ist, als der Kegel ABCDL ein dreymal höheres Verhältniss habe, als die FH zu der BD.

Ich behaupte aber ferner, dass auch der Kegel ABCDL nicht zu einem Körper, der grösser ist, als der Kegel EFGHN, ein dreymal höheres Verhältniss habe, als die BD zu der FH. Denn er habe, die Möglichkeit angenommen, ein solches zu einem grössern Körper, und dieser sey O, so hat *umgekehrt* der Körper O zu dem Kegel ABCDL ein dreymal höheres Verhältniss, als die FH zu der BD. Wie sich aber der Körper O zu dem Kegel ABCDL verhält, so verhält sich der Kegel EFGHN zu einem Körper, der kleiner ist, als der Kegel ABCDL. Folglich hat auch der Kegel EFGHN zu einem Körper, der kleiner ist, als der Kegel ABCDL, ein dreymal höheres Verhältniss, als die FH zu der BD, wovon die Unmöglichkeit gezeigt worden ist.
Der

Der Kegel ABCDL hat alſo nicht zu einem Körper, der gröſſer iſt, als der Kegel EFGHN, ein dreymal höheres Verhältniſs, als die BD zu der FH. Es iſt aber gezeigt worden, daſs er auch nicht zu einem kleinern Körper ein ſolches habe; folglich hat der Kegel ABCDL zu dem Kegel EFGHN ein dreymal höheres Verhältniſs, als die BD zu der FH. Aber wie ſich der Kegel zum Kegel verhält, ſo verhält ſich der Cylinder zum Cylinder, denn ein Cylinder, der mit dem Kegel auf einerley Grundfläche ſtehet, und gleiche Höhe hat, iſt das Dreyfache des Kegels, da (12, 10. S.) gezeigt worden iſt, daſs jeder Kegel der dritte Theil eines Cylinders ſey, der mit ihm einerley Grundfläche und gleiche Höhe hat; folglich hat auch der Cylinder zu dem Cylinder ein dreymal höheres Verhältniſs, als die BD zu der FH.

Demnach ſind ähnliche Kegel und Cylinder u ſ. w. w. z. e. w.

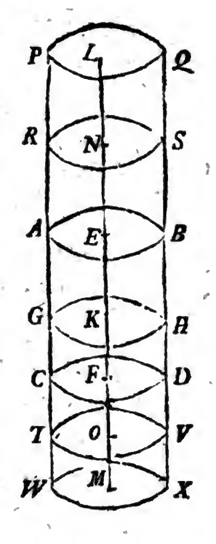
13. *Saz.*

Lehrſaz. Wenn ein Cylinder von einer ſeinen gegenüberliegenden Flächen parallelen Ebene geſchnitten wird, ſo verhält ſich der eine Cylinder zum andern, wie die Axe des einen zur Axe des andern.

Der Cylinder AD werde von der Ebene GH, die den gegenüberliegenden Flächen AB, CD parallel iſt, geſchnitten, und der Durchſchnitt begegne der Axe EF in dem Punkte *K*, ſo behaupte ich, daſs der Cylinder BG zum Cylinder GD ſich verhalte, wie die Axe E*K* zur Axe *K*F.

Beweis. Man verlängere die Axe EF, auf beyden Seiten nach den Punkten L, M und mache der Axe E*K* beliebig viele Stücke wie EN, NL und der Axe F*K* beliebig viele Stücke wie FO, OM gleich, hierauf lege man durch die Punkte L, N, O, M Ebenen, den beyden AB, CD parallel, und

in



in den Ebenen durch die Punkte L, N, O, M gedenke man sich um die Mittelpunkte L, N, O, M die Kreise PQ, RS, TV, WX, den beyden AB, CD gleich; endlich gedenke man sich die Cylinder QR, RB, DT, TX errichtet.

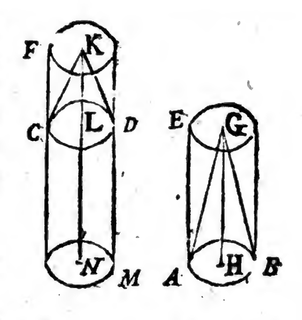
Da nun die Axen LN, NE, E*K* einander gleich sind, so verhalten sich (12, 11. S.) die Cylinder QR, RB, BG wie ihre Grundflächen. Die Grundflächen aber sind einander gleich, folglich sind auch die Cylinder QR, RB, BG einander gleich. Da nun aber die Axen LN, NE, E*K*, wie auch die Cylinder QR, RB, BG einander gleich sind, und die Anzahl der Stücke LN, NE, E*K* der Anzahl der Stücke QR, RB, BG gleich ist, so ist der Cylinder QG von dem Cylinder GB ebensovielfach, als die Axe *K*L von der Axe E*K*. Aus gleichen Gründen ist der Cylinder GX von dem Cylinder GD ebensovielfach, als die Axe M*K* von der Axe *K*F. Je nachdem nun die Axe KL ebensogrofs, oder gröſser, oder kleiner ist, als die Axe *K*M, so ist auch der Cylinder QG ebensogrofs, oder gröſser, oder kleiner, als der Cylinder GX. Da man nun von den vier Gröſsen, nämlich den zwey Axen E*K*, KF, und den zwey Cylindern BG, GD Gleichvielfache genommen hat, nämlich von der Axe E*K* und dem Cylinder BG, die Axe *K*L und den Cylinder QG, von der Axe *K*F und dem Cylinder GD aber, die Axe *K*M und den Cylinder GX, und gezeigt worden ist, dafs, je nachdem die Axe *K*L gröſser, ebensogrofs, oder kleiner ist, als die Axe *K*M, auch der Cylider QG gröſser, ebensogrofs, oder kleiner sey, als der Cylinder GX, so verhält sich (5, 4. Erkl.) die Axe E*K* zur Axe *K*F wie der Cylinder BG zum Cylinder GD, w. z. e. w.

14. *Saz.*

14. *Saz.*

Lehrsaz. Kegel und Cylinder auf gleichen Grundflächen verhalten sich zu einander wie ihre Höhen.

Es seyen auf den gleichen Grundflächen AB, CD die Cylinder FD, EB so behaupte ich, dass der Cylinder EB zum Cylinder FD sich verhalte wie die Axe GH zur Axe KL.



Beweis. Man verlängere die Axe KL nach dem Punkte N, und mache der Axe GH die LN gleich, hierauf gedenke man sich um die Axe LN den Cylinder CM beschrieben. Da nun die Cylinder EB, CM einerley Höhe haben, so verhalten sie sich (12, 11. S.) wie ihre Grundflächen. Die Grund flächen aber sind einander gleich, folglich sind auch die Cylinder EB, CM einander gleich. Da aber der Cylinder FM von der seinen gegenüberliegenden Flächen parallelen Ebene CD geschnitten wird, so verhält sich (12, 13. S.) der Cylinder CM zum Cylinder FD wie die Axe LN zur Axe KL. Es ist aber der Cylinder CM dem Cylinder EB und die Axe LN der Axe GH gleich; folglich verhält sich der Cylinder EB zum Cylinder FD wie die Axe GH zur Axe KL. Aber wie der Cylinder EB zum Cylinder FD sich verhält, so verhält sich der Kegel ABG zum Kegel CDK, denn (12, 10. S.) sind die Cylinder die Dreyfachen der Kegel; folglich verhält sich auch die Axe GH zur Axe KL wie der Kegel ABG zum Kegel CDK, und der Cylinder EB zum Cylinder FD, w. z. e. w.

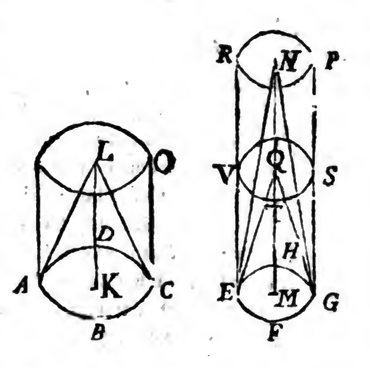
15. Saz.

15. *Saz.*

Lehrsaz. In gleichen Kegeln und Cylindern sind die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt; und Kegel und Cylinder deren Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt sind, sind einander gleich.

Es seyen gleiche Kegel und Cylinder, deren Grundflächen die Kreise ABCD, EFGH, und deren Durchmesser AC, EG, die Axen aber *K*L, MN seyen, welche auch die Höhen der Kegel und Cylinder sind, und man vollende die Cylinder AO, EP, so behaupte ich, dass die Grundflächen der Cylinder AO, EP den Höhen umgekehrt proportionirt seyen, das heisst, dass die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH sich verhalte, wie die Höhe MN zur Höhe KL.

Beweis. Die Höhe *K*L ist der Höhe MN entweder gleich, oder ungleich. Sie sey ihr *zuerst* gleich; es ist aber auch der Cylinder AO dem Cylinder EP gleich. Kegel und Cylinder aber, die einerley Höhen haben verhalten sich (12, 11. S.) wie ihre Grundflächen; folglich ist die Grundfläche ABCD der Grundfläche EFGH gleich, und mithin sind sie umgekehrt proportionirt, das heisst, die Grundfläche ABCD verhält sich zur Grundfläche EFGH wie die Höhe MN zur Höhe *K*L.



Es sey aber nun die Höhe MN der Höhe *K*L nicht gleich, sondern die MN sey grösser, und man nehme von der MN die der Höhe *K*L gleiche QM weg, und schneide durch

durch den Punkt Q den Cylinder EP mit der den gegenüberliegenden Kreisflächen EFGH, RP parallelen Ebene TVS, und gedenke sich den Cylinder ES errichtet, dessen Grundfläche der Kreis EFGH, und dessen Höhe die QM ist. Da nun der Cylinder AO dem Cylinder EP gleich, ES aber ein anderer Cylinder ist, so verhält sich (5, 7. S.) der Cylinder AQ zum Cylinder ES wie der Cylinder EP zum Cylinder ES. Aber (12, 11. S.) verhält sich der Cylinder AO zum Cylinder ES wie die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH, denn die Cylinder AO, ES haben einerley Höhe. Wie sich aber der Cylinder EP zum Cylinder ES verhält, so verhält sich (12, 13. S.) die Höhe MN zur Höhe MQ, denn der Cylinder EP wird von der seinen gegenüberliegenden Flächen parallelen Ebene TVS geschnitten. Demnach verhält sich die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH wie die Höhe MN zur Höhe MQ. Es ist aber die Höhe MQ der Höhe *K*L gleich; folglich verhält sich die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH wie die Höhe MN zur Höhe *K*L. Demnach sind in gleichen Cylindern AO, EP die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt.

Es seyen aber nun in den Cylindern AO, EP die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportionirt, und es verhalte sich die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH wie die Höhe MN zur Höhe KL, so behaupte ich, dass der Cylinder AO dem Cylinder EP gleich sey.

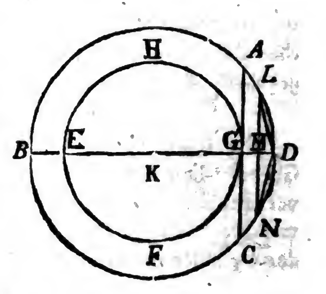
Da, nach der vorigen Construction, die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH sich verhält wie die Höhe MN zur Höhe KL, die Höhe KL aber der Höhe MQ gleich ist, so verhält sich die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH wie die Höhe MN zur Höhe MQ. Aber (12, 11. S.) verhält sich die Grundfläche ABCD zur Grundfläche EFGH wie der Cylinder AO zum Cylinder ES, denn sie haben einerley Höhe. Wie sich aber die Höhe MN zur Höhe MQ verhält, so verhält sich (12, 13. S.) der Cylinder EP zum Cylinder ES; folglich verhält sich der Cy-

Cylinder AO zum Cylinder ES wie der Cylinder EP zum Cylinder ES, und mithin ist (5, 9. S.) der Cylinder AO dem Cylinder EP gleich. Auf ähnliche Art wird dies aber auch von Kegeln gezeigt w. z. e. w.

16. *Saz.*

Aufgabe. Wenn man zwey Kreise um einerley Mittelpunkt hat, in den grösseren Kreis ein Polygon von gleichen Seiten, und zwar nach einer geraden Zahl, zu beschreiben, das den kleinern Kreis nicht berühre.

Es seyen die zwey gegebenen Kreise ABCD, EFGH um einerley Mittelpunkt K, man soll in den grössern Kreis ABCD ein Polygon von gleichen Seiten, und zwar nach einer geraden Zahl, beschreiben, das den kleinern Kreis EFGH nicht berühre.



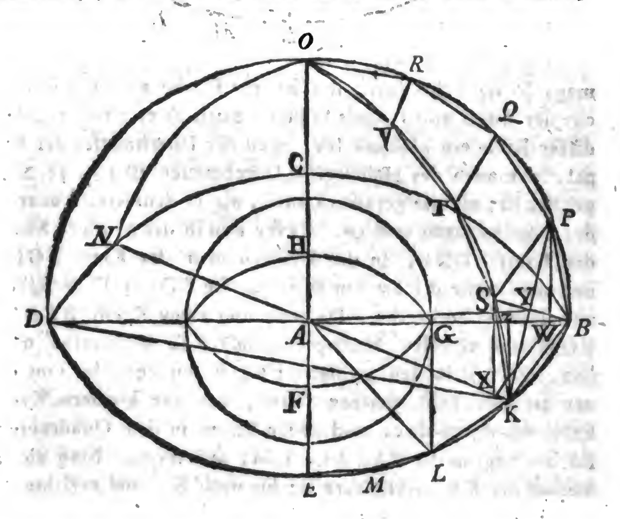
Auflösung und *Beweis.* Man ziehe durch den Punkt K die Linie BD, errichte in dem Punkte G auf der BD die AG lothrecht, und verlängere sie nach C, so berührt (3, 16. S.) die AC den Kreis EFGH. Halbirt man also den Bogen BAD, und seine Hälfte wieder aufs neue, und sezt man dies immer so fort, so behält man endlich (12, 2. *Lehns.* 1.) einen Bogen übrig, der kleiner ist, als der Bogen AD. Es bleibe ein solcher übrig, und er sey LD, so fälle man von dem Punkte L auf die BD das Loth LM verlängere es bis nach N, und ziehe die LD, DN, so ist die LD der DN gleich. Da nun die LN der AC parallel ist, die AC aber den Kreis EFGH berührt, so wird die LN den Kreis EFGH nicht berühren, noch viel weniger also werden die LD, DN den Kreis EFGH berühren. Wenn man nun (4, 1. S.) der LD gleiche Linien in dem

dem Kreise ABCD in Einem fort herumträgt, so wird in demselben ein Polygon von gleichen Seiten, und zwar nach einer geraden Zahl, beschrieben werden, das den kleinern Kreis EFGH nicht berührt, w. z. v. w.

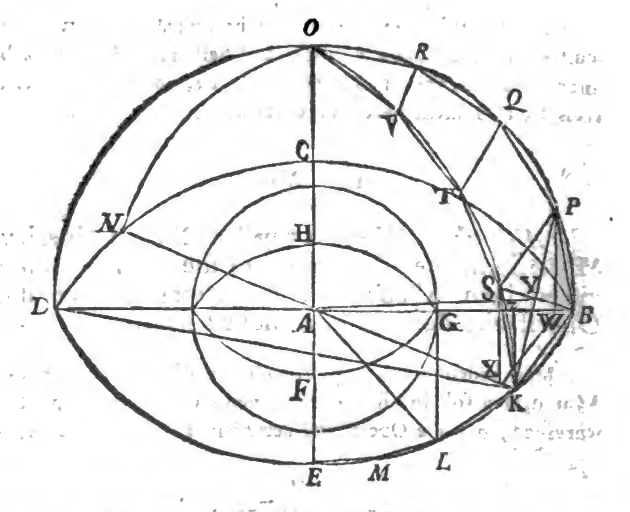
17. *Saz.*

Aufgabe. Wenn zwey Kugeln um einerley Mittelpunkt gegeben sind, in die grössere einen vieleckigen Körper zu beschreiben, der die Oberfläche der kleinern nicht berühre.

Man gedenke sich zwey Kugeln um einerley Mittelpunkt A, und man soll in die grössere einen vieleckigen Körper beschreiben, der die Oberfläche der kleinern nicht berühre.



Auflösung. Man schneide die Kugel mit einer Ebene durch den Mittelpunkt, so werden die Durchschnitte Kreise seyn, weil (11, 14. Erkl) durch Umdrehung des Halbkreises um den unverrückten Durchmesser die Kugel entstanden ist. In welcher Lage man also den Halbkreis gedenken mag,

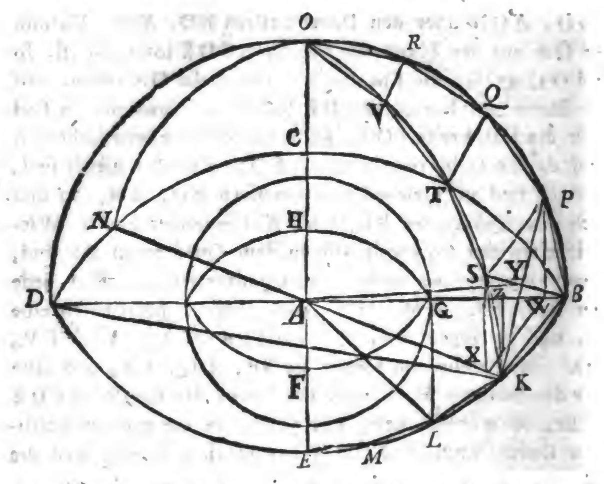


mag, so wird die durch ihn gelegte Fläche auf der Oberfläche der Kugel einen Kreis bilden. Auch ist es offenbar, daſs dieser Kreis ein gröſster sey, weil der Durchmesser der Kugel, der auch des Halbkreises Durchmesser ist (3, 15. S.), gröſser ist, als alle geraden Linien, die in dem Kreise oder in der Kugel gezogen werden. Es sey nun in der gröſsern Kugel der Kreis BCDE, in der kleinern aber der Kreis FGH, und man ziehe die beyden Durchmesser BD, CE derselben auf einander lothrecht. Da man nnn zwey Kreise BCDE, FGH um einerley Mittelpunkt hat, so beschreibe man (12, 16 S.) in den gröſsern BCDE ein Polygon von einer geraden Zahl gleicher Seiten, das den kleinern Kreis FGH nicht berühre, und dessen Seiten in dem Quadranten BE des Kreises die B*K*, *K*L, LM, ME seyen. Man ziehe hierauf die *K*A, verlängere sie bis nach N, und errichte in dem Punkte A die AO auf der Ebene des Kreises BCDE lothrecht, welche der Oberfläche der Kugel in dem Punkte O begegne. Hierauf lege man durch AO und durch die BD, *K*N Ebenen, die, nach dem oben Gesagten, auf der Oberfläche der Kugel gröſste Kreise machen werden. Sie machen also solche, und es seyen Halbkreise von ihnen die

BOD,

BOD, *K*ON über den Durchmessern BD, *K*N. Da nun die OA auf der Ebene des Kreises BCDE lothrecht ist, so sind (11, 18. S.) alle Ebenen, die durch die OA gehen, auf der Ebene des Kreises BCDE lothrecht, und mithin sind auch die Halbkreise BOD, *K*ON auf dieser Ebene lothrecht. Und da die Halbkreise BOD, *K*ON einander gleich sind, denn sie sind auf gleichen Durchmessern BD, *K*N, so sind auch ihre Quadranten BE, BO, *K*O einander gleich. Wieviel Seiten des Polygons also in dem Quadranten BE sind, ebensoviele werden auch in den Quadranten BO, *K*O, jede den B*K*, *K*L, LM, ME gleich, seyn. Man beschreibe sie, und sie seyen BP, PQ, QR, RO, *K*S, ST, TV, VO. Man ziehe nun ferner die SP, TQ, VR, und fälle von den Punkten P, S nach der Ebene des Kreises BCDE Lothe, so werden diese (11, 38. S.) in die gemeinschaftlichen Durchschnitte BD, *K*N der Flächen fallen, weil die Flächen der Halbkreise BOD, *K*ON auf der Ebene des Kreises BCDE lothrecht sind. Sie fallen also dahin, und seyen PW, SX, und man ziehe die WX. Da man nun in gleichen Halbkreisen BOD, *K*ON die gleichen Bogen BP, *K*S genommen, und die Lothe PW, SX gefällt hat, so ist die PW der SX, die BW aber der *K*X gleich. Es ist aber auch die ganze BA der ganzen *K*A, folglich auch der Rest WA dem Reste AX gleich, und es verhält sich also die BW zu der WA wie die *K*X zu der AX, uud mithin ist (6, 2. S.) die WX der *K*B parallel. Da nun die PW, SX auf der Ebene des Kreises BCDE lothrecht sind, so ist (6, 11. S.) die PW der SX parallel. Es ist aber gezeigt worden, dass sie ihr auch gleich sey; folglich sind (1, 33. S.) die WX, SP gleich und parallel. Und da die WX der SP, aber auch der *K*B parallel ist, so ist (11, 9. S.) die SP der *K*B parallel, und beyde werden von den Linien BP, *K*S verbunden; folglich ist die vierseitige Figur *K*BPS in *einer* Ebene. Denn wenn zwey gerade Linien parallel sind, und man nimmt in jeder derselben beliebige Punkte an, so liegt die gerade Linie, die diese Punkte verbindet (11, 7. S.) mit den beyden Parallelen in *einer* Ebene. Aus eben den Gründen ist auch jede der vierseitigen Figuren SPQT, TQRV in *einer* Ebene. Es ist aber (11, 2. S.) auch das Dreyeck VRO in

einer

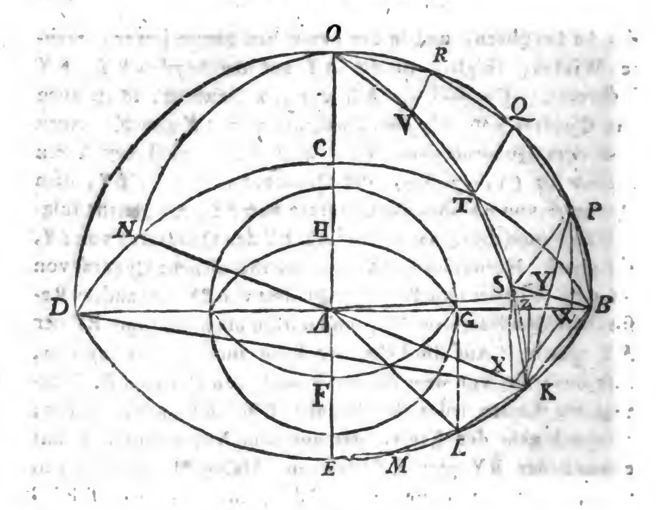


einer Ebene. Gedenkt man ſich alſo von den Punkten P, S, Q, T, R, V nach dem Punkte A gerade Linien gezogen, ſo wird zwiſchen den Bogen BO, *K*O ein vieleckiger Körper beſchrieben, der aus Pyramiden zuſammengeſezt iſt, deren Grundflächen die vierſeitigen Figuren *K*BPS, SPQT, TQRV, und das Dreyeck VRO ſind, die Spize aber der Punkt A iſt. Macht man nun auf jeder der Seiten *K*L, LM, ME eben die Conſtruction wie auf der *K*B, und verrichtet man dies auch in den drey übrigen Quadranten, und in der andern Halbkugel, ſo wird in die Kugel ein vieleckiger Körper beſchrieben, der aus Pyramiden zuſammengeſezt iſt, deren Grundflächen die oben genannten vierſeitigen Figuren und das Dreyeck VRO, und die mit ihnen zuſammengehören, ſind, die Spize aber der Punkt A iſt, und ich behaupte, daſs der genannte vielſeitige Körper die Oberfläche der kleinern Kugel, in welcher der Kreis FGH iſt, nicht berühre.

Beweis. Man fälle von dem Punkte A auf die Ebene der vierſeitigen Figur *K*BPS das Loth AY, welches ihr in dem Punkte Y begegne, und ziehe BY, *K*Y. Da nun die AY auf der Ebene der vierſeitigen Figur KBPS lothrecht iſt, ſo macht ſie (11, 3. Erkl.) mit allen geraden Linien, die

die sie berühren, und in der nämlichen Ebene liegen, rechte Winkel; folglich ist die AY auf den beyden BY, KY lothrecht. Da aber die AB der AK gleich ist, so ist auch das Quadrat von AB dem Quadrate von AK gleich. Auch sind dem Quadrate von AB, weil der Winkel bey Y ein rechter ist (1, 47. S.), die Quadrate von AY, BY, dem Quadrate von AK aber die Quadrate von AY, KY gleich; folglich sind auch die Quadrate von AY, BY den Quadraten von AY, KY gleich. Nimmt man also das gemeinschaftliche Quadrat von AY weg, so ist der eine Rest, das Quadrat von BY dem andern Reste, dem Quadrate von KY, und mithin auch die Linie BY der KY gleich. Auf ähnliche Art kann nun gezeigt werden, dass auch die von dem Punkte Y nach den Punkten P, S gezogenen Linien jeder der beyden BY, KY gleich seyen; demnach geht der Kreis, der aus dem Mittelpunkte Y mit einem, der BY oder KY gleichen, Halbmesser beschrieben wird, auch durch die Punkte P, S, und mithin ist KPBS eine vierseitige Figur im Kreise. Da nun die KB grösser ist, als die WX, die WX aber der SP gleich ist, so ist auch die KB grösser, als die SP. Aber die KB ist jeder der beyden KS, BP gleich; folglich ist auch jede der beyden KS, BP grösser, als die SP. Da nun KBPS eine vierseitige Figur im Kreise ist, und die KB, BP, KS einander gleich sind, die PS aber kleiner, als sie, und die BY ein Halbmesser des Kreises ist, so ist das Quadrat von KB grösser, als das Doppelte des Quadrats von BY. Man fälle nun von dem Punkte K auf die BD das Loth KZ. Da nun die BD kleiner ist, als das Doppelte von DZ, und (6, 1. S.) die DB zu der DZ sich verhält, wie das Rechteck aus DB, BZ zum Rechtecke aus DZ, BZ so ist, wenn man das Quadrat von BZ beschreibt, und das Parallelogramm auf DZ vollendet, das Rechteck aus DB, BZ kleiner, als das Doppelte des Rechtecks aus DZ, BZ. Zieht man nun ferner die KD, so ist (6, 8. S.) das Rechteck aus DB, BZ dem Quadrate von KB, und das Rechteck aus DZ, BZ dem Quadrate von KZ gleich; folglich ist auch das Quadrat von KB kleiner, als das Doppelte des Quadrats von KZ. Aber das Quadrat von KB ist grösser, als das Doppelte des Quadrats von BY;

folg-



folglich ist das Quadrat von KZ grösser, als das Quadrat von BY. Da nun die BA der KA gleich ist, so ist auch das Quadrat von BA dem Quadrate von KA gleich, auch sind (1, 47. S.) dem Quadrate von BA die Quadrate von BY, AY, und dem Quadrate von KA die Quadrate von KZ, AZ gleich; folglich sind die Quadrate von BY, AY den Quadraten von KZ, AZ gleich. Unter diesen aber ist das Quadrat von KZ grösser, als das Quadrat von BY; folglich ist das Quadrat von AZ kleiner, als das Quadrat von AY, und mithin die Linie AY grösser, als die Linie AZ, folglich noch vielmehr die AY grösser, als die AG. Es geht aber die AY an die eine Grundfläche des vieleckigen Körpers, die AG aber an die Oberfläche der kleinern Kugel; folglich berührt der vieleckige Körper die Oberfläche der kleinern Kugel nicht.

Anderer Beweis.

Es kann noch auf eine andere Art kürzer gezeigt werden, dass die AY grösser, als die AG sey.

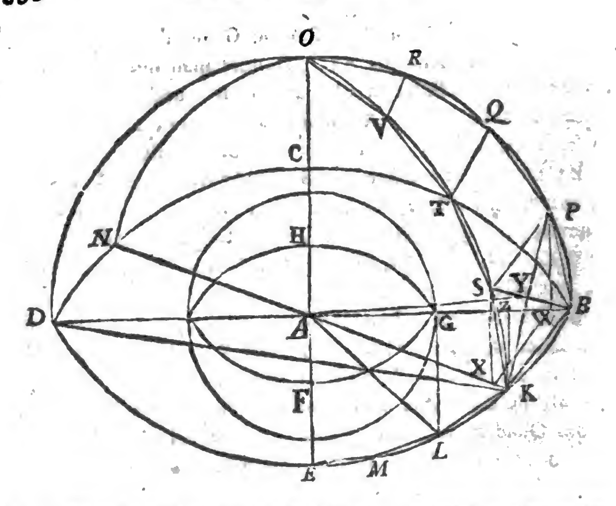
Man

Man errichte in dem Punkte G auf der AG die GL lothrecht, und ziehe die AL. Halbirt man nun den Bogen EB und dessen Hälfte wieder aufs neue, und sezt man dies immer so fort, so behält man zulezt (12, 2. *Lehns.* 1.) einen Bogen übrig, der kleiner ist, als der Bogen des Kreises BCD, der von einer der GL gleichen Linie abgeschnitten wird. Es bleibe also ein solcher übrig, und er sey der Bogen KB, so ist mithin die gerade Linie KB kleiner, als die GL. Da nun BKSP eine vierseitige Figur im Kreise ist, und die Linien PB, BK, KS einander gleich sind, die PS aber kleiner ist, als sie, so ist der Winkel BYK stumpf, und daher die BK grösser, als die BY. Aber die GL ist grösser, als die BK; folglich ist noch vielmehr die GL grösser, als die BY, und mithin das Quadrat von GL grösser, als das Quadrat von BY. Weil aber die AL der AB gleich ist, so ist auch das Quadrat von AL dem Quadrate von AB gleich. Aber dem Quadrate von AL sind die Quadrate von AG, GL, dem Quadrate von AB aber die Quadrate von BY, AY gleich; folglich sind die Quadrate von AG, GL den Quadraten von BY, AY gleich. Unter diesen aber ist das Quadrat von BY kleiner, als das Quadrat von GL; folglich ist das Quadrat von AY grösser, als das Quadrat von AG, und mithin auch die Linie AY grösser, als die AG.

Demnach ist, da zwey Kugeln um einerley Mittelpunkt gegeben waren, in der grösseren ein vieleckiger Körper beschrieben worden, der die Oberfläche der kleinern nicht berührt, w. z. v. w.

Zusaz. Wenn auch in der andern Kugel ein, dem in der Kugel BCDE beschriebenen vieleckigen Körper, ähnlicher vieleckiger Körper beschrieben wird, so hat der vieleckige Körper in der Kugel BCDE zu dem vieleckigen Körper in der andern Kugel ein dreymal höheres Verhältniss, als der Durchmesser der Kugel BCDE zum Durchmesser der andern Kugel. Denn theilt man die Körper in Pyramiden von gleicher Anzahl, und gleicher Art, so sind

 diese



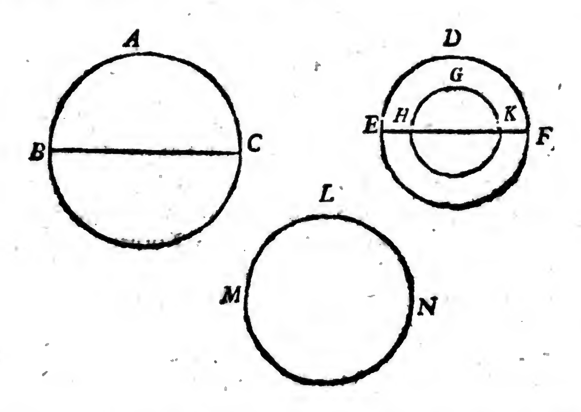
diese Pyramiden einander ähnlich. Aehnliche Pyramiden aber sind (12, 8. Zus.) in dreymal höherem Verhältnisse ihrer homologen Seiten; folglich hat die Pyramide, deren Grundfläche die vierseitige Figur KBPS, und deren Spize der Punkt A ist, zu der Pyramide in der andern Kugel von der nämlichen Art ein dreymal höheres Verhältniss, als die homologe Seite zu der homologen Seite, das heisst, als der Halbmesser AB der Kugel um den Mittelpunkt A zum Halbmesser der andern Kugel. Ebenso hat auch jede der Pyramiden in der Kugel um den Mittelpunkt A zu jeder der Pyramiden von gleicher Art in der andern Kugel ein dreymal höheres Verhältniss, als die AB zum Halbmesser der andern Kugel. Aber (5, 12. S.) verhält sich eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder wie die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder; folglich hat der ganze vieleckige Körper in der Kugel um den Mittelpunkt A zu dem ganzen vieleckigen Körper in der andern Kugel ein dreymal höheres Verhältniss, als die AB zum Halbmesser der andern Kugel, das heisst, als der Durchmesser BD zum Durchmesser der andern Kugel w. z. e. w.

18. *Saz.*

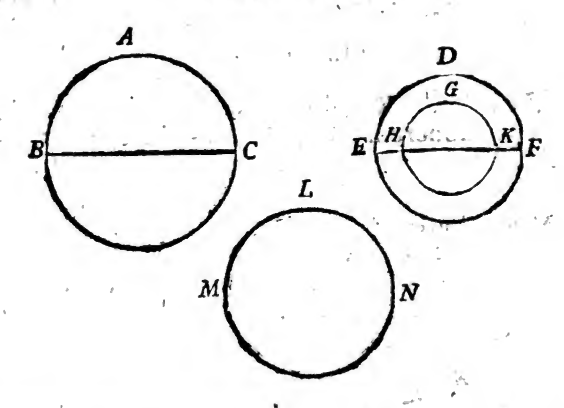
18. *Saz.*

Lehrsaz. Kugeln sind zu einander in dreymal höherem Verhältnisse ihrer Durchmesser.

Man gedenke sich zwey Kugeln ABC, DEF deren Durchmesser BC, EF seyen, so behaupte ich, dafs die Kugel ABC zu der Kugel DEF ein dreymal höheres Verhältnifs habe, als die BC zu der EF.



Beweis. Wäre dies nicht, so hätte die Kugel ABC entweder zu einer kleinern oder zu einer gröſſern Kugel, als die DEF ist, ein dreymal höheres Verhältnifs, als die BC zu der EF. Sie habe *zuerst* ein solches zu einer kleinern, nämlich zu der GHK; man gedenke sich aber die Kugel DEF mit der GHK um einerley Mittelpunkt, und beschreibe (11, 17. S.) in der gröſſern Kugel DEF einen vieleckigen Körper, der die Oberfläche der kleinern Kugel GHK nicht berühre, und in der Kugel ABC beschreibe man einen, dem in der Kugel DEF beschriebenen, ähnlichen vieleckigen Körper, so hat (11, 17. *Zus.*) der vieleckige Körper in der Kugel ABC zu dem vieleckigen Körper in der



Kugel DEF ein dreymal höheres Verhältniſs, als die BC zu der EF. Nach der Vorausſezung aber hat die Kugel ABC zu der Kugel GHK ein dreymal höheres Verhältniſs, als die BC zu der EF; folglich verhält ſich (5, 11. S.) die Kugel ABC zur Kugel GHK wie der vieleckige Körper in der Kugel ABC zu dem vieleckigen Körper in der Kugel DEF, und mithin *verwechſelt*, die Kugel ABC zu dem in ihr beſchriebenen vieleckigen Körper wie die Kugel GHK zu dem in der Kugel DEF beſchriebenen vieleckigen Körper. Es iſt aber die Kugel ABC gröſſer, als der in ihr beſchriebene vieleckige Körper, folglich iſt auch die Kugel GHK gröſſer, als der in der Kugel DEF beſchriebene vieleckige Körper. Sie iſt aber auch kleiner, denn ſie wird von ihm eingeſchloſſen, welches unmöglich iſt; folglich hat die Kugel ABC nicht zu einer kleinern Kugel, als die DEF, ein dreymal höheres Verhältniſs, als die BC zu der EF. Auf ähnliche Art kann nun gezeigt werden, daſs auch die Kugel DEF nicht zu einer kleinern Kugel, als die ABC iſt, ein dreymal höheres Verhältniſs habe, als die EF zu der BC.

Ich behaupte aber ferner, daſs auch die Kugel ABC nicht zu einer gröſſern Kugel, als die DEF iſt, ein dreymal höheres Verhältniſs habe, als die BC zu der EF. Denn ſie

ſie habe, die Möglichkeit angenommen, ein ſolches zu einer gröſſern Kugel LMN, ſo hat umgekehrt die Kugel LMN zur Kugel ABC ein dreymai höheres Verhältniſs, als der Durchmeſſer EF zum Durchmeſſer BC. Wie ſich aber die Kugel LMN zur Kugel ABC verhält, ſo verhält ſich die Kugel DEF zu einer Kugel, die kleiner iſt, als die ABC, wie oben (12, 2. Lehnſ. 2.) gezeigt worden iſt, weil die Kugel LMN gröſſer iſt, als die DEF; folglich hat auch die Kugel DEF zu einer Kugel, die kleiner iſt, als die ABC, ein dreymal höheres Verhältniſs, als die EF zu der BC, wovon die Unmöglichkeit gezeigt worden iſt. Demnach hat die Kugel ABC nicht zu einer gröſſern, als die DEF iſt, ein dreymal höheres Verhältniſs, als die BC zu der EF. Es iſt aber gezeigt worden, daſs ſie ein ſolches auch nicht zu einer kleinern Kugel habe; folglich hat die Kugel ABC zu der Kugel DEF ein dreymal höheres Verhältniſs, als die BC zu der EF, w. z. e. w.

ANHANG.

ЭМАЛИА

Neue Theorie

der

Parallelen

aus der

Betrachtung des gleichſeitigen Dreyecks abgeleitet.

Les définitions sont ce qui mérite le plus d'attention dans les élémens de Géométrie, et d'où dépend sur-tout la perfection de ces élémens.

D'ALEMBERT.

Lehnsäze.

1. Wenn zwey zusammenstossende gerade Linien von einer dritten geschnitten werden, so machen sie mit dieser die inneren Winkel an einerley Seite der schneidenden Linie zusammen kleiner, als zwey rechte (El. 1, 17.).

2. Wenn eine gerade Linie mit einer andern ungleiche Nebenwinkel macht, so fällt ein Loth von jedem Punkte der ersten Linie nach der zweyten auf die Seite des spizen Winkels (El. 1, 17.).

3. Das Loth von der Spize eines Dreyecks noch dessen Grundlinie fällt, wenn beyde Winkel an der Grundlinie spiz sind, innerhalb, wenn aber der eine dieser Winkel stumpf ist, ausserhalb des Dreyecks. (Lehns. 2.)

4. In einem Punkte einer geraden Linie kann nicht mehr als *ein* Loth auf ihr aufgerichtet werden.

Dies folgt aus dem Saze von der Gleichheit aller rechten Winkel unter einander, welcher vermittelst des Princips der Congruenz bewiesen werden kann. (S. meinen Lehrbegr. d. rein. Math. 1. Bd. §. 74.)

5. Nach einer geraden Linie kann von einem Punkte ausser ihr nicht mehr als ein einziges Loth gehen. (El. 1, 17.)

6. Hat ein Dreyeck einen rechten oder einen stumpfen Winkel, so sind die beyden übrigen nothwendig spiz. (El. 1, 17.)

7. In einem gleichschenkeligen Dreyecke sind die Winkel an der Grundlinie und in einem gleichseitigen alle drey Winkel spiz. (El. 1, 17.)

8. Im gleichschenkeligen Dreyecke ist die Linie von der Spi-

Spize nach der Mitte der Grundlinie auf dieser lothrecht und halbirt den Winkel an der Spize und das ganze Dreyeck. (El. 1, 8.)

9. Die Linie, durch welche der Winkel an der Spize des gleichschenkeligen Dreyecks halbirt wird, halbirt auch die Grundlinie und das ganze Dreyeck und ist auf der Grundlinie lothrecht. (El. 1, 4.)

10. Das Loth von der Spize nach der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreyecks halbirt die leztere, so wie den Winkel an der Spize und das ganze Dreyeck. (El. 1, 26.)

11. Ein auf der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreyecks in ihrer Mitte aufgestelltes Loth geht durch die Spize. (Lehnf. 8. 4.)

12. Wenn in einem Dreyecke eine gerade Linie von der Spize nach der Mitte der Grundlinie so geht, dass sie die leztere halbirt und lothrecht schneidet, so ist das Dreyeck gleichschenkelig. (El. 1, 4.)

13. Wenn in einem Dreyecke die gerade Linie, welche den Winkel an der Spize halbirt, auf der Grundlinie lothrecht ist, so ist das Dreyeck gleichschenkelig. (El. 1, 26.)

14. In dem rechtwinkeligen Dreyecke, welches die Hälfte eines gleichseitigen ist, ist der schiefe Winkel an der Grundlinie doppelt so grofs, als jener an der Spize. (Lehnf. 8. El. 1, 5.)

15. Zwey rechtwinkelige Dreyecke sind congruent, wenn in beyden ein schiefer Winkel und eine Seite stückweise gleich sind. (El. 1, 26.)

16. Zwey rechtwinkelige Dreyecke sind congruent, wenn die Hypotenuse und eine der Katheten in beyden gleich ist.

Der Beweis dieses Sazes ist, von der Parallelentheorie ganz unabhängig, geführt in m. Lehrbegriff der rein. Math. §. 95.

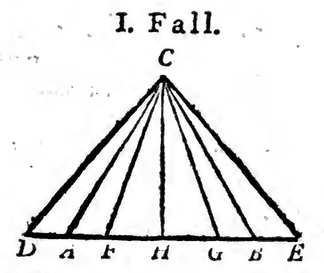
Saz. I.

Saz I.

Lehrſaz. Wenn zwey Seiten eines Dreyecks einander gleich ſind, aber einen Winkel einſchlieſſen, der dem Winkel eines gleichſeitigen Dreyecks ungleich iſt, ſo iſt auch die dritte Seite dieſes Dreyecks jenen beyden ungleich, oder, ſo iſt das Dreyeck nur gleichſchenkelig.

Es ſey ABC ein gleichſeitiges Dreyeck, AB deſſen Grundlinie, CH das Loth oder die Höhe, ACB der Winkel der Spize. Nun ſey ferner

I. Fall.



Bedingung.
DC = CE
DCE > ACB
DCH = HCE

Saz.
DE > { CE, CD.

Beweis.

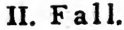
1) Da (p. hyp.) DCE > ACB, ſo iſt auch $\frac{1}{2}$ DCE > $\frac{1}{2}$ ACB, d. h. DCH > ACH; folglich auch 2 DCH > 2 ACH.

2) Nun iſt 2 ACH = CAH (Lehrſ. 14); folglich 2 DCH > CAH (p. dem. 1.)

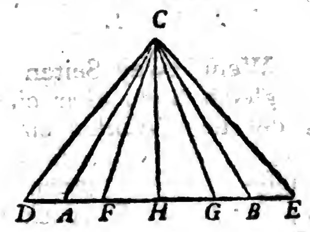
3) Es iſt aber wiederum CAH > CDH (El. I, 16.); folg-

folglich noch vielmehr 2 DCH > CDH, d. h. DCE > CDE.

4) Ist aber dies, so ist auch $DE > \begin{cases} CE \\ CD \end{cases}$ (El. 1, 19.)



II. Fall.



Bedingung.	*Saz.*
CF = CG FCG < ACB FCH = HCG	$FG < \begin{cases} CG \\ CF. \end{cases}$

Beweis.

1) Da (p. hyp.) FCG < ACB, so ist auch $\frac{1}{2}$ FCG < $\frac{1}{2}$ ACB, d. h. FCH < ACH, und mithin 2 FCH < 2 ACH.

2) Nun ist 2 ACH = CAH (Lehnf. 14.); folglich 2 FCH < CAH (p. dem. 1.)

3) Es ist aber wiederum CAH < CFH (El. 1, 16.); folglich noch vielmehr 2 FCH < CFH, d. h. FCG < CFG.

4) Ist aber dies, so ist auch $FG < \begin{cases} CG \\ CF. \end{cases}$ (El. 1, 19.).

w. z. e. w.

Zus. 1. Wenn zwey gleiche gerade Linien einen Winkel einschliessen, der dem Winkel eines gleichseitigen Dreyecks gleich ist, und man verbindet ihre Endpunkte durch eine gerade Linie, so macht diese mit jenen ein gleichseitiges Dreyeck.

Denn, wäre dies nicht, so wäre sie entweder grösser, oder kleiner, als jene beyden; im ersten Falle wäre der Winkel an der Spize grösser, im andern kleiner, als der an der Grundlinie (El. 1, 18.), in beyden Fällen also dem Winkel eines gleichseitigen Dreyecks ungleich (El. 1, 5.), welches gegen die Voraussezung, also unmöglich ist.

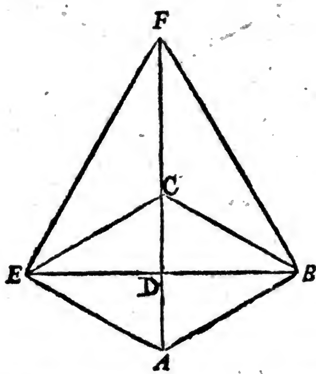
Zus.

Zuſ. 2. Demnach haben alle gleichſeitigen Dreyecke einerley innere Winkel.

Denn nach Zuſ. 1. iſt im gleichſeitigen Dreyecke die Gröſſe der Winkel von der Gröſſe der Seiten ganz unabhängig.

Saz II.

Lehrſaz. Im gleichſeitigen Dreyecke beträgt jeder Winkel zwey Drittheile eines rechten.



Bedingung.	*Saz.*
AB = BC = AC.	ACB, BAC, ABC $= \frac{2}{3}$ R.

Vorbereitung.

1) Halbire (El. 1, 10.) die AC in dem Punkte D, ziehe die BD und verlängere ſie, bis DE = BD, ziehe ferner die AE, CE.

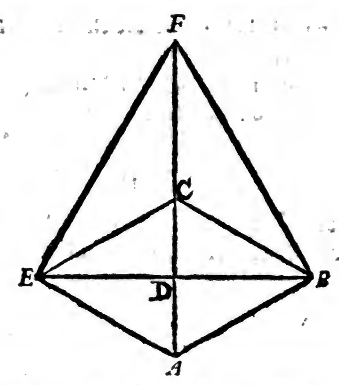
2) Auf der BE beſchreibe (El. 1, 1.) ein gleichſeitiges Dreyeck BFE und ziehe die CF.

Beweis.

1) Da (p. conſtr.) BD = DE, ferner DC = DC und BDC = CDE = R (Lehnſ. 8. Erkl. 10.) ſo iſt BC = CE (El. 1, 4.)

2) Ebenſo iſt erweislich, daſs AE = AB ſey.

3) Da nun (p. hyp.) BC = AB = AC, ſo iſt △ ACE ein



ein dem △ABC congruentes gleichseitiges Dreyeck (El. 1, 8.) und mithin ACB = ACE.

4) Nun ist DBC = $\frac{1}{2}$ ABC (Lehns. 8.); aber ABC = DBF (S. I. Zus. 2.); folglich auch DBC = $\frac{1}{2}$ DBF (Grunds. 7. 1.)

5) Ebenso ist erweislich, dass DEC = $\frac{1}{2}$ DEF sey.

6) Nun sind über der nämlichen Grundlinie BE das gleichschenkelige Dreyeck BEC (p. dem.) und das gleichseitige BEF (p. constr.) folglich muss das Loth CD des ersteren verlängert durch die Spize F des lezteren gehen. (Lehns. 11.)

7) Das Loth DF halbirt aber den Winkel an der Spize (Lehns. 10.); folglich ist DFB = DFE = $\frac{1}{2}$ BFE.

8) Nun ist auch BFE = EBF = BEF (El. 1, 5.); aber (p. dem. 4.) EBC = $\frac{1}{2}$ EBF, und BEC = $\frac{1}{2}$ BEF; folglich ist EBC = BEC = CBF = CFB = CFE = CEF (Grunds. 7.) und mithin BC = CF = CE (El. 1, 6.)

9) Nun ist auch BE = BF = FE (p. constr.) folglich △BEC ≌ △BFC ≌ △EFC (El. 1, 8.), und mithin BCE = BCF = FCE.

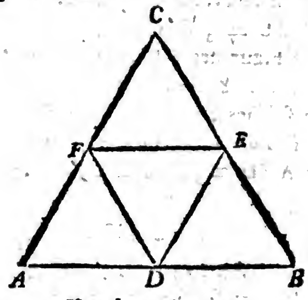
10) Nun sind BCE + BCF + FCE = 4R (El. 1, 13. Zus.); folglich $\left.\begin{matrix}BCE\\BCF\\FCE\end{matrix}\right\} = \frac{4}{3}$R.

11) Es ist aber BCD = $\frac{1}{2}$ BCE (Lehns. 8.); folglich ist BCD d. h. ACB = $\frac{2}{3}$ R. w. z. e. w.

An-

Anderer Beweis

dass ACB $= \frac{2}{3}$ R, wenn AB $=$ BC $=$ AC ist:



Vorbereitung.

Halbire die AB, BC, AC in den Punkten D, E, F, und ziehe die DE, EF, FD.

1) Da (p. hyp.) AB $=$ BC $=$ AC, so ist auch $\frac{1}{2}$ AB $=$ $\frac{1}{2}$ BC $=$ $\frac{1}{2}$ AC, d. h. AD $=$ DB $=$ BE $=$ EC $=$ CF $=$ AF.

2) Nun ist auch ABC $=$ ACB $=$ BAC (El. 1, 5.); folglich $\triangle$ ADF $\cong$ $\triangle$ DBE $\cong$ $\triangle$ FEC (El. 1, 4.)

3) Da jeder der Winkel ABC, ACB, BAC ein Winkel eines gleichseitigen Dreyecks ist, so sind die congruenten Dreyecke ADF, DBE, FEC auch gleichseitig (S. I. Zus. 1.). Demnach ist auch DEF ein gleichseitiges, den eben genannten congruentes Dreyeck (El. 1, 8.), und mithin EDF $=$ ADF $=$ BDE $=$ ACB (S. I. Zus. 2.).

4) Nun sind ADF $+$ EDF $+$ BDE $=$ 2 R (El. 1, 13.);

folglich $\left.\begin{array}{l}\text{ADF}\\ \text{EDF}\\ \text{BDE}\end{array}\right\} = \frac{2}{3}$ R; und mithin auch ACB $= \frac{2}{3}$ R; w. z. e. w.

Zus. 1. Demnach sind im gleichseitigen Dreyecke die drey inneren Winkel zusammen zwey rechten gleich.

Zus. 2. In dem rechtwinkeligen Dreyecke, welches die Hälfte eines gleichseitigen ist, verhalten sich demnach die inneren Winkel zusammen, wie die Zahlen 1, 2, 3 (Lehns. 14.).

Zus. 3. In dem rechtwinkeligen Dreyecke, welches die Hälfte eines gleichseitigen ist, sind demnach die zwey schiefen Winkel zusammen einem rechten gleich (Zus. 2.).

Zuſ. 4. Wenn demnach ein ſchiefer Winkel (BCD) eines rechtwinkeligen Dreyecks $= \frac{2}{3}$ R iſt, ſo muſs der andere ſchiefe Winkel CBD $= \frac{1}{3}$ R ſeyn.

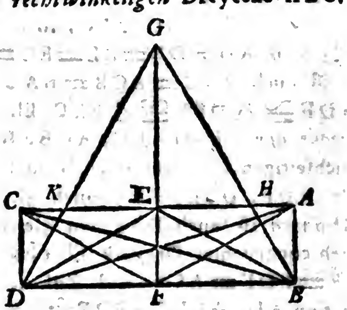
Denn (ſ. die Figur des erſten Beweiſes) beſchreibt man auf einer Linie AE = BC ein gleichſeitiges Dreyeck AEC und halbirt man ſolches durch das Loth ED, ſo iſt △ ADE ≅ △ DBC (S. I. Zuſ. 2. Lehnſ. 15.) und mithin AED = DBC. Nun iſt AED $= \frac{1}{3}$ R (Zuſ. 2.); folglich auch DBC $= \frac{1}{3}$ R.

Saz III.

Lehrſaz. In jedem Dreyecke ſind die drey inneren Winkel zuſammen zwey rechten gleich.

Der Saz gilt

I. vom *rechtwinkeligen* Dreyecke ABC.



Bedingung.	*Saz.*
Es iſt BAC = R	ABC + ACB + BAC = 2 R.

Vorbereitung.

1) Auf der AC errichte (El. 1, 11.) in C das Loth CD, mache CD = AB und ziehe die DB.

2) Halbire die AC in E (El. 1, 10.) und ziehe die BE, DE.

3) Halbire die BD in F und ziehe die FA, FE, FC.

4) Auf der BD beſchreibe (El. 1, 1.) das gleichſeitige Dreyeck BDG, und verlängere die FE bis nach G.

Beweis.

1) Die Linie FE muſs verlängert durch die Spize des gleichſeitigen Dreyecks gehen, was über der Grundlinie BD beſchrieben werden kann (Lehnſ. 11.)

2)

2) Ist diese Spize G, so müssen die Seiten BG, DG die Linie AC zwischen den Punkten A und E, C und E schneiden. Denn

(a) die Linie von B nach G muss die AC schneiden, weil sie von einem Punkte diesseits nach einem Punkte jenseits der AC geht.

(b) Die BG muss die AC auf der rechten Seite des Punkts E schneiden, weil das gleichseitige Dreyeck BGD durch das Loth FG, wovon EG ein Theil ist, halbirt wird. (Lehns. 8.).

(c) Die BG muss die AC auf der linken Seite des Punkts A schneiden, weil sie dieselbige sonst entweder in dem Punkte A oder in einem auf der rechten Seite von A liegenden Punkte schneiden müsste, wo dann die Winkel an der Grundlinie des (p. dem. 5.) bey E rechtwinkeligen Dreyecks, dessen Höhe die GE ist, im ersten Falle = 2 R, im andern > 2 R seyn würden, welches beydes gegen El. 1, 17. also unmöglich ist.

Da nun eben so erweislich ist, dass die Linie DG die AC zwischen den Punkten C und E schneiden müsse, so müssen also die Seiten BG, DG des über der BD zu beschreibenden gleichseitigen Dreyecks BDG die Linie AC zwischen den Punkten A und E, C und E schneiden. Es seyen diese Durchschnittspunkte H, K.

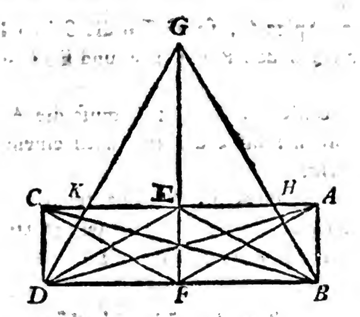
3) Da AB = EC, AB = CD, BAE = ECD = R (p. constr.), so ist △ ABE ≌ △ CDE (El. 1, 4.), und mithin BE = DE, AEB = CED.

4) Da BE = DE (p. dem. 3.) BF = DF (p. constr.) und EF = EF, so ist BFE = DFE = R (El. 1, 8. Erkl. 10.) und BEF = DEF.

5) Da AEB = CED (p. dem. 3.) und BEF = DEF (p. dem. 4.), so ist AEB + BEF = CED + DEF, d. h. AEF = CEF (Grunds. 2.) = R. (Erkl. 10.).

6) Da AE = CE (p. constr.) EF = EF und AEF = CEF = R (p. dem. 5.) so ist AF = CF (El. 1, 4.).

7) Da BF = DF, AB = DC (p. constr.) und AF = CF (p. dem. 6.), so ist △ AFB ≌ △ DFC und mithin ABF = CDF (El. 1, 8.).



8) Es ist aber auch FBG = FDG (El. 1, 5.); folglich ABF — FBG = CDF — FDG, d. h. ABG = CDG oder ABH = CDK (Grundſ. 3.).

9) Nun ist ferner BAH = DCK, AB = CD (p. conſtr.), folglich △ABH =≌ △CDK und mithin BH = DK (El. 1, 26.).

10) Es ist aber auch BG = DG (p. conſtr.), folglich BG — BH = DG — DK, d. h. GH = GK (Grundſ. 3.), und mithin auch GHK ein gleichſeitiges Dreyeck (S. I. Zuſ. 1.); folglich $\left.\begin{matrix}GHK\\GKH\end{matrix}\right\} = \frac{2}{3}$ R. (S. II.)

11) Ist aber dies, ſo ist auch $\left.\begin{matrix}AHB\\CKD\end{matrix}\right\} = \frac{2}{3}$ R (El. 1, 15.)

12) Da nun auch $\left.\begin{matrix}BAH\\DCK\end{matrix}\right\} =$ R (p. hyp. et conſtr.), ſo ist $\left.\begin{matrix}ABH\\CDK\end{matrix}\right\} = \frac{1}{3}$ R (S. II. Zuſ. 4).

13) Nun ist $\left.\begin{matrix}DBG\\BDG\end{matrix}\right\} = \frac{2}{3}$ R (S. II.), folglich ABH + DBG = CDK + BDG d. h. ABD = BDC = $\frac{2}{3}$ R + $\frac{1}{3}$ R = R.

14) In der vierſeitigen Figur ABDC ist alſo jeder der vier Winkel A, B, D, C ein rechter (p. hyp. conſtr. et dem.).

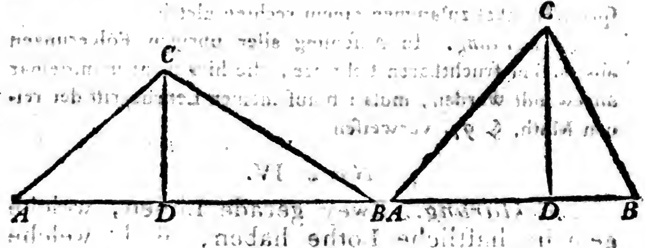
15) Nun ist in den bey A und D rechtwinkeligen Dreyecken ABC, DBC, AB = DC (p. conſtr.) und BC = BC, folglich ist △ABC ≌ △BCD (Lehrſ. 16.); und mithin kommt auf jedes dieſer Dreyecke von den vier rechten Winkeln der vierſeitigen Figur ABDC die Hälfte, d. h. zwey rechte.

Demnach ſind die Winkel ABC + ACB + BAC = 2 R, w. z. e. w.

Der

Der Saz gilt

II. vom *stumpfwinkeligen* und *spizwinkeligen* Dreyecke ABC, d. h. wenn $ACB > R$ oder $ACB < R$, so ist $ABC + ACB + BAC = 2R$.



Beweis.

Fälle (El. 1, 12.) von der Spize C des stumpfen oder spizen Winkels ACB auf die Grundlinie AB das Loth CD, so fällt solches in einem Falle wie im andern innerhalb des Dreyecks (Lehns. 3. 6.); folglich wird dadurch das Dreyeck ABC in zwey rechtwinkelige Dreyecke ADC, BDC zerlegt, in deren jedem, nach dem ersten Theile des Beweises, die inneren Winkel zusammen zwey rechten gleich sind; folglich sind die inneren Winkel dieser beyden rechtwinkeligen Dreyecke zusammen vier rechten gleich. Zieht man also davon die zwey rechte Winkel ab, welche das Loth CD mit der Grundlinie AB an dem Punkte D macht (El. 1, 13.), so bleiben für die inneren Winkel im ersten Falle des stumpfwinkeligen im andern des spizwinkeligen Dreyecks ABC zwey rechte übrig, w. z. e. w.

Der Saz gilt also von allen Arten der Dreyecke (Lehns. 6.), folglich auch von der Gattung; d. h. er gilt in der ganzen Allgemeinheit wie er oben ist aufgestellt worden, w. z. e. w.

Zus. 1. Aus dem ersten Theile des Beweises erhellet, dass, wenn auf einer geraden Linie zwey gleiche Lothe aufgestellt und deren Endpunkte durch eine gerade Linie verbunden werden, auch jeder der beyden Winkel, welche die Verbindungslinie mit ihnen macht, ein rechter sey.

Zus.

Zus. 2. Macht man daher die beyden Lothe nicht nur einander selbst, sondern auch ihrem Abstande von einander gleich, so wird durch die gerade Linie, welche ihre Endpunkte verbindet, ein Quadrat eingeschlossen (p. dem. 14. 15.).

Zus. 3. Im rechtwinkeligen Dreyecke sind die beyden spizen Winkel zusammen einem rechten gleich.

Anmerkung. In Ansehung aller übrigen Folgerungen aus diesem fruchtbaren Lehrsaze, die hier nicht unmittelbar angewandt werden, muss ich auf meinen Lehrbegriff der reinen Math. §. 97. verweisen.

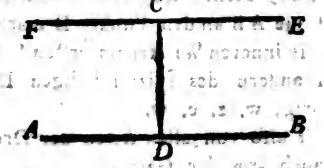
Saz IV.

Erklärung. Zwey gerade Linien, welche gemeinschaftliche Lothe haben, d. h. welche beyde auf *einer* dritten zugleich lothrecht sind, oder auf welchen *eine* dritte zugleich lothrecht ist, heissen *parallel.*

Zusaz. Eine gerade Linie, die auf der einen von zwey Parallelen lothrecht ist, ist allemal auch auf der andern lothrecht.

Saz V.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt mit einer gegebenen geraden Linie eine Parallele zu ziehen.



Gegeben.	*Gesucht.*
1) Eine gerade Linie AB.	FE durch C parallel der AB.
2) Ein Punkt C.	

Auflösung.

1) Von C fälle auf AB das Loth CD (El. 1, 12.).

2) In C errichte auf DC das Loth CE (Ford. 2. El. 1, 11.).

3) Verlängere CE nach F, so ist FE die verlangte Parallele.

Be-

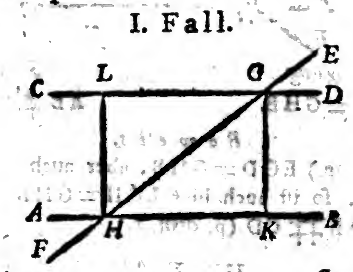
B e w e i s.

Da (p. conſtr.) $\left.\begin{matrix}BDC\\DCE\end{matrix}\right] = R$, folglich auch $\left.\begin{matrix}ADC\\DCF\end{matrix}\right] = R$; ſo iſt DC das gemeinſchaftliche Loth der Linien AB, FE, folglich FE $\#$ AB, (S. IV.), auch geht FE durch C, w. z. v. w.

S a z VI.

Lehrſaz. Wenn zwey gerade Linien ſvon einer dritten ſo geſchnitten werden, daſs entweder die Wechſelwinkel einander gleich ſind, oder der äuſsere Winkel ſeinem inneren, an der nämlichen Seite der ſchneidenden Linie liegenden, Gegenwinkel gleich iſt, oder die beyden inneren, an einerley Seite liegenden, Winkel zwey rechten gleich ſind, ſo ſind die beyden geraden Linien parallel.

I. Fall.



Bedingung. CGH = GHB.

Saz. AB $\#$ CD.

V o r b e r e i t u n g.

Fälle von G nach AB das Loth GK, und von H nach CD das Loth HL (El. 1, 12.).

B e w e i s.

1) Da (p. conſtr.) $\left.\begin{matrix}GKH\\GLH\end{matrix}\right] = R$, ſo iſt GKH = GLH (Grundſ. 10).

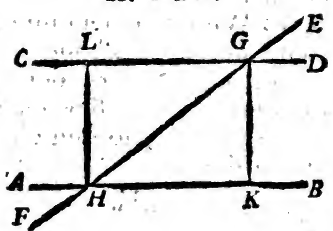
2) Da (p. hyp.) auch LGH = GHK, und GH = GH, ſo iſt $\triangle$ GHK $\cong$ $\triangle$ GHL, und mithin KGH = GHL (El. 1, 26.).

3)

3) Da nun sowohl KGH + GHK = R, als LGH + GHL = R (S. III. Zus. 3.) aber GHK = LGH und KGH = GHL (p. hyp. et dem.), so ist auch sowohl KGH + LGH = R, als GHK + GHL = R (Grunds. 2.) d. h. KGL / KHL = R.

4) Da nun (p. constr.) auch bey K, L rechte Winkel sind, so sind GK, HL gemeinschaftliche Lothe der Linien AB, CD, und mithin AB ⌗ CD (S. IV.)

II. Fall.



Bedingung. EGD = GHB.

Saz. AB ⌗ CD.

Beweis.

Da (p. hyp.) EGD = GHB, aber auch EGD = LGH (El. 1, 15.), so ist auch hier LGH = GHB (Grunds. 1.) und mithin AB ⌗ CD (p. dem. I.).

III. Fall.

Bedingung. DGH + GHB = 2R.

Saz. AB ⌗ CD.

Beweis.

Da (p. hyp.) DGH + GHB = 2R, aber auch DGH + LGH = 2R (El. 1, 13.), so ist DGH + LGH = DGH + GHB (Grunds. 1.) und mithin LGH = GHB (Grunds. 3.), folglich wiederum AB ⌗ CD (p. dem. I.), w. z. e. w.

Saz VII.

Lehrsaz. Wenn zwey parallele Linien von einer dritten geschnitten werden, so macht diese

ſe die Wechſelwinkel einander gleich, den äuſſeren Winkel ſeinem inneren, an der nämlichen Seite liegenden, Gegenwinkel gleich, und die beyden inneren an einerley Seite liegenden Winkel zwey rechten gleich.

Bedingung.

AB ⌗ CD.

Saz.

1) CGH = GHB
2) EGD = GHB
3) DGH + GHB = 2 R.

Vorbereitung.

Fälle von G auf AB das Loth GK, und von H auf CD das Loth HL (El. 1, 12.).

Beweis.

I. Theil.

1) Da (p. hyp.) AB ⌗ CD, und (p. conſtr.) GKH ſowohl, als GLH ein rechter Winkel, ſo iſt auch KGL ſowohl als KHL ein rechter Winkel (S. IV. Zuſ.), folglich KGL = KHL (Grundſ. 10.).

2) Es iſt aber KGL = KGH + HGL u. KHL = KHG + GHL; folglich iſt KGH + HGL = KHG + GHL (Grundſ. 1.).

3) Es iſt aber auch KGH + GHK = HGL + GHL = R (S. III. Zuſ. 3.)

4) Beydes (2. 3.) könnte nicht zuſammenbeſtehen, wenn nicht die vier genannten Winkel einander paarweiſe gleich wären. Es muſs alſo KGH = GHL und LGH = GHK oder CGH = GHB ſeyn, w. z. e. w.

II. Theil.

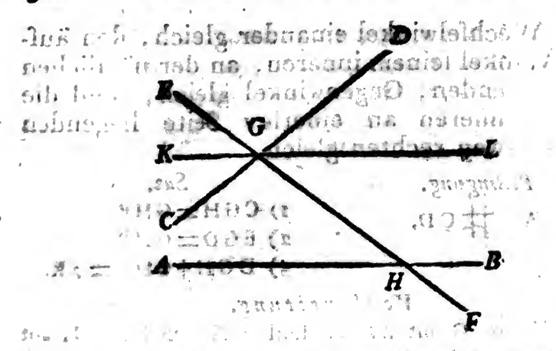
Wenn AB ⌗ CD, ſo iſt p. dem. (I. Th.) CGH = GHB. Nun iſt CGH = EGD (El. 1, 15.), folglich auch EGD = GHB (Grundſ. 1.).

III. Theil.

Wenn AB ⌗ CD, ſo iſt p. dem. (I. Th.) CGH = GHB; folglich CGH + DGH = DGH + GHB (Grundſ. 2.). Es iſt aber CGH + DGH = 2 R (El. 1, 13.); folglich auch DGH + GHB = 2 R, w. z. e. w.

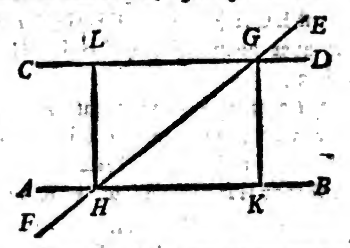
Zuſ. 1. Durch einerley Punkt auſserhalb einer geraden Linie kann mit dieſer Linie nicht mehr als *eine* Parallele gezogen werden.

Denn,



Denn, gesezt, es wäre durch den Punkt G ausser der KL auch die CD der AB parallel, so wäre (S. VII) sowohl DGH + GHB = 2R, als LGH + GHB = 2R, folglich DGH + GHB = LGH + GHB (Grundf. 1.), und mithin DGH = LGH (Grundf. 3.) wider Grundf. 9., welches unmöglich ist.

Zus. 2. Parallele Linien sind in allen Punkten gleich weit von einander entfernt (*aequidistantes*).



Denn da p. dem. (1. Th.) aus dem angenommenen Parallelismus der Linien AB, CD, die von der dritten EF in den Punkten G, H geschnitten werden, folgt, dass KGH = GHL und KHG = HGL sey, so ist, weil auch GH = GH, △GHK ≅ △GHL und mithin GK = LH (El. 1, 26.), wo man auch immer die Punkte G, H annehmen mag.

Zus. 3. Wenn zwey Entfernungen (GK, LH) einer geraden Linie (CD) von einer andern (AB), die mit ihr in einer Ebene liegt, einander gleich sind, so sind auch alle übrigen Entfernungen beyder einander gleich.

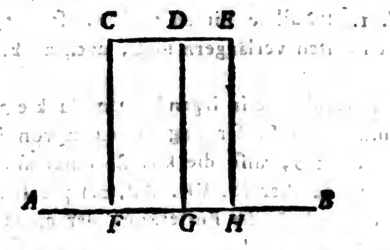
Denn

Denn da (p. hyp.) GK, LH die Entfernungen der Punkte G, L von der Linie AB sind, so sind bey K, H rechte Winkel, weil jede Entfernung eines Punkts von einer geraden Linie durch ein Loth bestimmt wird, was von ihm nach der Linie geht. Da nun (p. hyp.) GK = LH, so sind auch bey G; L rechte Winkel (S. III. Zus. 1.), folglich GK, LH gemeinschaftliche Lothe der Linien AB, CD, also AB, CD Parallelen (S. IV.) und mithin aequidistante Linien (S. VII. Zus. 2.).

Zus. 4. Wenn die Entfernungen zweyer Punkte (G, D) einer geraden Linie (CD) von einer andern (AB) ungleich sind, so sind alle übrigen Entfernungen beyder ungleich.

Denn fände sich unter den Entfernungen aller übrigen Punkte der ersten von der zweyten nur eine einzige, welche einer von den ungleichen Entfernungen der Punkte G, D, oder, überhaupt der Entfernung irgend eines andern Punkts der Linie CD von der AB gleich wäre, so hätten die beyden geraden Linien *zwey* gleiche Entfernungen, und folglich wären auch alle übrigen Entfernungen beyder einander gleich (Zus. 3.).

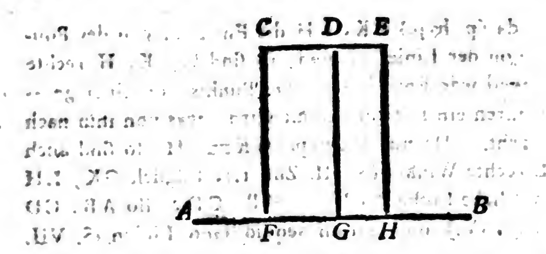
Zus. 5. Alle Punkte, welche von einer geraden Linie gleich weit abstehen, liegen in einer geraden Linie.



Denn, wenn C, D, E von der Linie AB gleich weit abstehen, so ist CF = DG = EH, auch sind bey F, G, H rechte Winkel, folglich sind, wenn man C mit D und D mit E durch eine gerade Linie verbindet, bey C, D, E rechte Winkel (S. III. Zus. 1.) und mithin CDG + EDG = 2R; folglich CDE eine gerade Linie (El. 1, 14.).

Zus. 6. Alle aequidistante Linien sind auch Parallelen.

Denn



Denn, sind AB, CE aequidistante Linien, so ist CF = EH, auch sind bey F, H rechte Winkel, folglich sind alsdann auch bey C, E rechte Winkel (S. III. Zus. 1.), demnach CF, EH gemeinschaftliche Lothe der Linien AB, CE und mithin AB ♯ CE (S. IV.).

Saz VIII.

Erklärung. Wenn zwey gerade Linien in einerley Ebene eine solche Lage gegeneinander haben, daſs sie verlängert an einer von beyden Seiten zusammenstoſsen, so heiſsen sie nach dieser Seite *zusammenlaufend* (*convergentes*) und nach der entgegengesezten *auseinanderlaufend* (*divergentes*).

Zus. 1. Parallele Linien treffen, soweit man sie auch auf beyden Seiten verlängern mag, doch an keiner Seite zusammen.

Denn, sollten sie in irgend einem Punkte zusammentreffen, so müſste die Entfernung der einen von der andern für diesen Punkt = 0, also die kleinste unter allen möglichen, seyn. Nun sind aber (S. VII. Zus. 2.) parallele Linien auch aequidistante, d. h. die Entfernung der einen von der andern ist für jeden nachfolgenden Punkt eben so groſs, wie für alle vorhergehenden, sie kann also unmöglich für einen nachfolgenden Punkt kleiner, als für einen vorhergehenden, folglich noch viel weniger die kleinste unter allen möglichen werden, d. h. sie können nie zusammentreffen.

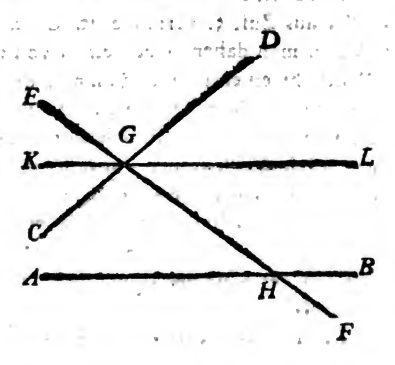
Zus. 2. Wenn also zwey gerade Linien nicht parallel sind, so laufen sie immer nach der einen Seite hin zusammen, und nach der entgegengesezten auseinander (Zus. 1.).

Sol-

Solche Linien kann man daher der Kürze wegen *A-parallelen* nennen.

Zuſ. 3. Wenn alſo zwey gerade Linien nach beyden Seiten verlängert an keiner von beyden zuſammenlaufen, ſo ſind ſie parallel (Zuſ. 2.).

Zuſ. 4. Eine gerade Linie (CD), welche die eine (KL) von zwey Parallelen (AB, KL) ſchneidet, muſs verlängert auch die andere (AB) ſchneiden.



Denn, wenn AB ⧺ KL und CD die KL in G ſchneidet, ſo gingen, wofern die CD verlängert nicht auch die AB ſchnitte, durch einerley Punkt G zwey gerade Linien CD, KL mit der AB parallel (Zuſ. 3.), wider S. VII. Zuſ. 1., welches unmöglich iſt.

Zuſ. 5. Bey zwey zuſammenlaufenden geraden Linien iſt nach der Seite ihrer Convergenz zu die Entfernung der einen von der andern für jeden nachfolgenden Punkt kleiner, als für den vorhergehenden.

Denn bey zwey zuſammenlaufenden geraden Linien wird endlich die Entfernung der einen von der andern für einen gewiſſen Punkt $= 0$ (p. def.). Dieſe Grenze kann ſie nicht anders erreichen, als dadurch, daſs ſie alle, zwiſchen ihrer anfänglichen Gröſſe und der Nulle liegenden, Gröſſen, dem Geſeze der Stetigkeit gemäſs, durch ſtetige Abnahme durchläuft. Könnte ſie nun auch nur für *einen* nachfolgenden

den Punkt dieselbige bleiben, die sie für den nächstvorhergehenden oder einen andern war, so wären die beyden Linien aequidistante (S. VII. Zus. 3.), also Parallelen (S. VII. Zus. 2.); folglich keine Aparallelen (S. VIII. Zus. 2.), gegen die Voraussezung.

Zus. 6. Bey zwey auseinander laufenden geraden Linien ist die Entfernung der einen von der andern nach der Seite ihrer Divergenz zu für jeden nachfolgenden Punkt grösser, als für den nächstvorhergehenden.

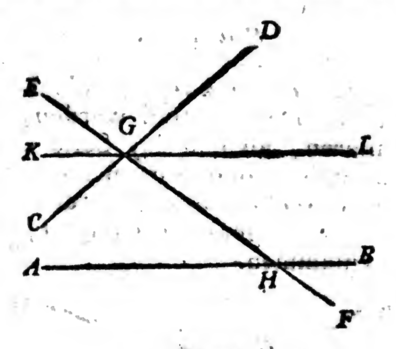
Dies erhellet aus Zus. 5. vermöge des Gegensazes.

Zus. 7. Wenn man daher in der einen von zwey Aparallelen nach Willkühr einen Punkt annimmt, und durch diesen mit der andern eine Parallele zieht, so muss von den zwey Stücken, in welche die Aparallele durch diese getheilt wird, das eine, nach der Seite der Convergenz zu liegende, diesseits, das andere, nach der Seite der Divergenz zu liegende, jenseits der Durchschnittsparallele fallen.

Denn alle Punkte der getheilten Aparallele haben von der ungetheilten auf der Seite der Convergenz eine kleinere, auf der Seite der Divergenz aber eine grössere Entfernung als die sämmtlichen Punkte der Parallele von der lezteren (Zus. 5. 6.).

Saz IX.

Lehrsaz. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, dass die beyden inneren, an einerley Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel zusammen grösser, als zwey rechte, sind, so laufen die beyden geraden Linien an eben der Seite auseinander, und umgekehrt: Wenn zwey auseinander laufende gerade Linien von einer dritten geschnitten werden, so macht diese die beyden inneren, an einerley Seite liegenden, Winkel zusammen grösser, als zwey rechte.



I. Theil.

Bedingung.	*Saz.*
$DGH + GHB > 2R.$	AB und CD laufen nach B, D auseinander.

Beweis.

Liefen sie nach dieser Seite hin nicht aus einander, so wären sie entweder parallel, oder sie liefen zusammen. Im ersten Falle wäre $DGH + GHB = 2R$ (S. VII.), im andern $DGH + GHB < 2R$ (Lehns. 1.), beydes gegen die Vorausſezung, welches unmöglich ist; folglich müssen AB, CD an der Seite B, D auseinander laufen.

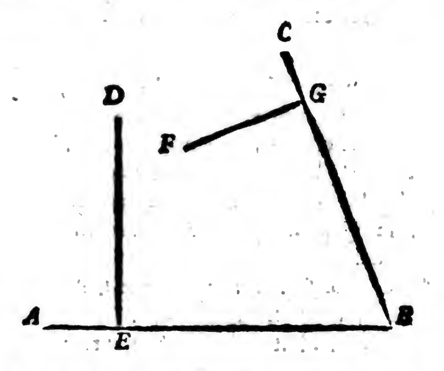
II. Theil.

Bedingung.	*Saz.*
AB und CD laufen nach B, D auseinander.	$DGH + GHB > 2R.$

Beweis.

Wird durch G der AB die KL parallel gezogen, so muſs GD jenseits dieser Parallele fallen (S. VIII. Zus. 5.), folglich ist $DGH > LGG$ und mithin $DGH + GHB > LGH + GHB$. Aber $LGH + GHB = 2R$ (S. VII.); folglich $DGH + GHB > 2R$, w. z. e. w.

Saz X.



den (S. VIII. Zuf. 4.). In diefem Falle hingegen mufs die BC, wenn fie an der Seite des fpizen Winkels, hier ABC, verlängert wird, mit der, gleichfalls verlängerten, ED zufammentreffen (S. X.), und zwar unter einem fpizen Winkel (Lehnf. 6.), weil DEB = R ift. Ift der Punkt des Zufammentreffens H, fo werden, weil (p. hyp.) FGC = R, die zwey geraden Linien FG, EDH von der dritten, GCH unter Winkeln, die zufammen < 2R find, gefchnitten, folglich müffen fie an eben der Seite, wo diefe Winkel liegen, zufammentreffen (S. X.).

Druckfehler und Verbeſſerungen.

Seite 9 Zeile 10 von oben: ſtatt AE lies AF.
— 10 Z. 12 von unten: ſt. dec l. der.
— 68 Z. 16 v. o. ſt. Centriwinkels l. Centralwinkels; und ebenſo in den übrigen Stellen des dritten Buchs, wo dieſes Wors noch vorkommt.
— 71 Z. 12 v. u. ſt. gegenüberliegenden l. gegenüberliegende.
— 80 Z. 9 v. o. ſt. Berührungspunkt l. Berührungspunkts.
— 81 Z. 2 v. u. ſt. Kreie l. Kreis.
— 100 Z. 13 v. o. ſt. Aufgabe l. Lehrſaz.
ebend. Z. 13 v. u. ſt. daſs heiſst l. das heiſst.
S. 117 Z. 8 v. o. ſt. FA l. EA.
— 123 Z. 11 v. u. ſt. BEK l. BFK.
ebend. Z. 8 v. u. ſt. EKC l. BKC.
S. 125 Z. 17 v. u. ſt. CF l. DF.
ebend. Z. 13 v. u. ſt. CDF l. CFD.
S. 129 Z. 3 v. o. ſt. EABCD l. FABCD.
— 139 Z. 10 v. u. ſt. per l. der.
— 160 Z. 7 v. u. ſt. di l. die.
— 169 Z. 10 v. u. ſt. BE l. BF.
— 171 Z. 11 v. u. ſt. Setien l. Seiten.
— 173 Z. 6 v. o. iſt das Wort: dem, auszulöſchen.
— 183 Z. 2 v. u. ſt. Dreyecke l. Dreyecken.
— 196 Z. [illegible] Zuſ. 2.) vor dem Wor-

[illegible] Vinkel.

[illegible] ene.
[illegible] e Buchſtaben B und H

[illegible] e Buchſtaben D und R

[illegible] Buchſtabe G.
[illegible] e, auszulöſchen.